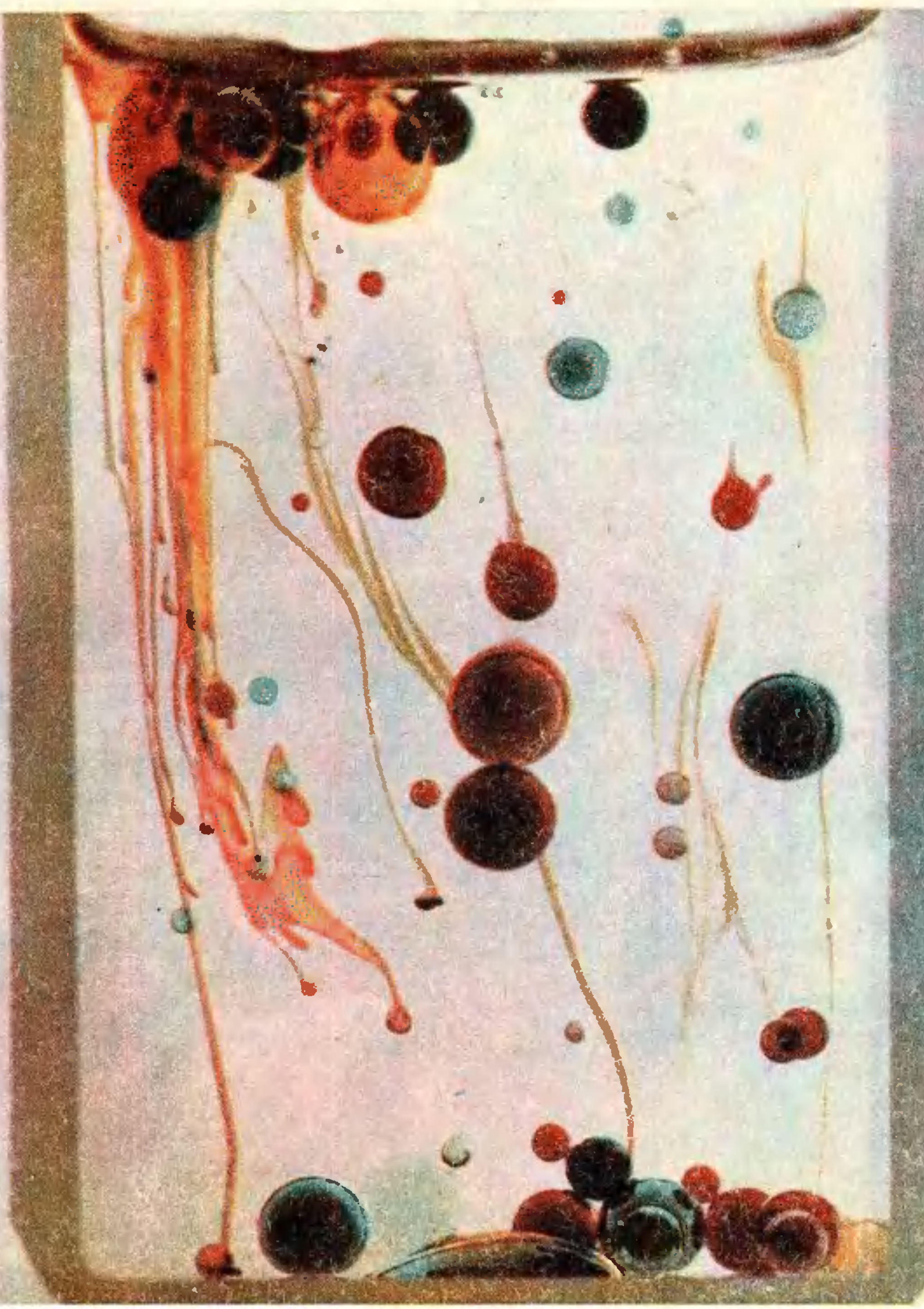
ISSN 0130-2221

Квант

11
1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



XVI ВСЕСОЮЗНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ
(Баку, апрель 1982 г.). Идет эксперимент...

Фото Г. Мирзаханова

Основан в 1970 году

КВАНТ 11 1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ: IN THIS ISSUE:

Разноцветные шарики, которые вы видите на первой странице обложки,— это капли воды, подкрашенные акварельными красками. Чем обусловлена четкая сферическая форма капель? Почему они «висят» неподвижно? Об этом вы можете прочитать в статье А. Боровего и Ю. Климова «Что происходит на границе».

СССР 60 ЛЕТ

Б. Гнеденко

Математика в СССР

30 декабря исполняется шестьдесят лет со дня торжественного провозглашения Первым Всесоюзным съездом Советов декрета о создании первого в мире многонационального социалистического государства — Союза Советских Социалистических Республик. В этом государстве как равноправные объединились народы и народности, населяющие нашу страну.

Первоначально, в 1922 г., в состав Советского Союза входили лишь четыре союзные республики — РСФСР, УССР, БССР, и ЗСФСР. Через два года в состав СССР вошли Узбекская и Туркменская союзные республики. В 1929 г. к ним присоединилась Таджикская республика. После того как Казахская и Киргизская автономные республики РСФСР достигли определенных успехов в хозяйственном и культурном развитии, в 1936 г. они были преобразованы в союзные. В том же году Закавказская федерация размежевалась по национальному признаку на три союзные республики — Азербайджанскую, Армянскую и Грузинскую. Латвийская, Литовская, Эстонская и Молдавская республики вошли в состав Союза в 1940 году. Пятнадцать равноправных республик прошли большой и трудный путь экономического и культурного развития, вместе выдержали все испытания и победили в Великой Отечественной войне.

Советский Союз начал свое существование в очень сложных условиях. Долгие три года разрушительной империалистической войны, приведшей к революционному взрыву 1917 года, разорили страну. Последующие пять лет Гражданской войны, интервенции, голода и разрухи лишили ее огромного числа производителей — крестьян, рабочих, инженеров, учителей, врачей. Необходимо было немедленно приняться за восстановление разрушенного войной хозяйства, ликвидировать массовую беспризорность детей.

Но царизм оставил и другое тяжкое наследие — почти 75% населения дореволюционной России было неграмотным. На национальных же окраинах положение было во много раз хуже. Так, среди киргизов грамотность достигала лишь 0,6%, среди туркмен — 0,7%, среди таджиков — 0,5%, среди узбеков — 1,5%. Лиц же, имевших высшее образование и принадлежавших коренным национальностям царских окраин, в лучшем случае насчитывались единицы. На огромных пространствах Белоруссии, Закавказья, Средней Азии, Забайкалья не было ни одного высшего учебного заведения. Народы, населявшие эти территории, фактически были лишены возможности роста и расцвета.

Представители моего поколения прекрасно помнят, как сразу же после Великой Октябрьской революции люди потянулись к знаниям. Тогда в самых глухих уголках нашей родины были открыты школы.

Но Советская власть не ограничилась развитием только начальной ступени образования. Еще гремела Гражданская война и голод собирал свою страшную жатву, а Советское правительство стало создавать университеты на бывших окраинах России, столетиями отрезанных от просвещения (Иркутск, Баку, Ереван, Тбилиси, Ташкент). За годы своего существования эти университеты воспитали десятки тысяч специалистов.

Академик АН УССР Борис Владимирович Гнеденко — лауреат Государственной премии, заведующий кафедрой теории вероятностей Московского государственного университета.

В тяжелые годы разрухи, Гражданской войны и голода революция вызвала подлинную страсть к познанию и научному творчеству. Примечательно, что эту страсть не могли погасить ни голод, ни холод, ни материальные трудности.

Об этом времени прекрасно сказано академиком П. С. Александровым — одним из ведущих советских математиков, создателем советской школы теоретико-множественной топологии: «Период начала 20-х годов... был довольно своеобразным явлением. Важным положительным фактором этой эпохи в истории математики Московского университета являлся безграничный научный энтузиазм молодежи. Своей идейной почвой этот энтузиазм имел великие патриотические идеи советской научной культуры, возбудившие в учащихся и ученых то подлинное научное горение, которое с такой силой никогда не проявлялось в стенах дореволюционного математического факультета Московского университета».

Такая же картина наблюдалась как в немногочисленных старых университетах, так и во вновь созданных. Первые, революционные приемы студентов в университеты подготовили и выпустили в жизнь старшее поколение советских математиков, воспитавшее последующие поколения советских ученых и заложившее основу научных математических школ.

Такие школы возникли в Москве, Тбилиси, Ташкенте, Киеве, Харькове. В Ленинграде продолжала свое развитие математическая школа, основы которой были созданы еще трудами П. Л. Чебышева, А. М. Ляпунова, А. А. Маркова и других замечательных ученых и педагогов. В Москве зародилась школа теории функций действительного переменного, вскоре распространившая свои интересы на теорию функций комплексного переменного, теорию вероятностей, топологию, дифференциальные уравнения, геометрию; основоположниками этой школы были Д. Ф. Егоров и Н. Н. Лузин.

Новые университетские центры получили серьезную помощь от старых университетов, в первую очередь от Московского и Ленинградского. В частности, в Тбилиси переехали воспитанники Петербургского (позднее Ленинградского) университета Н. И. Мусхелишвили и Г. Н. Николадзе, а также воспитанник Московского университета А. М. Размадзе, положившие начало известной грузинской школе математического анализа и математической физики. Основы ташкентской школы математической статистики и математического анализа были заложены В. И. Романовским — воспитанником А. А. Маркова.

Огромное значение для развития математической науки в союзных республиках оказал курс партии на индустриализацию страны. Для массы строившихся заводов и фабрик были нужны инженеры — для их подготовки требовались математики. Появилась крайняя нужда в ученых, способных математическими методами оказывать помощь практике. В конце двадцатых — начале тридцатых годов на всей территории страны развернулось строительство новых вузов, был расширен прием в аспирантуру, в старейших вузах и в институтах Академии наук СССР были выделены места для подготовки специалистов всех уровней из среды молодежи коренных национальностей союзных и автономных республик. Эта мера оказалась исключительно продуктивной, поскольку в короткие сроки для активной научной работы было подготовлено большое количество талантливых молодых людей. Вернувшись к себе на родину, они стали центрами притяжения научной мысли молодых республик и организаторами национальных научных школ. В результате в Ереване возникла сильная школа теории функций комплексного переменного, в Баку — школа функционального анализа и теории дифференциальных уравнений, в Алма-Ате и Фрунзе начали развиваться исследования по качественной теории дифференциальных уравнений.

Великая Отечественная война выявила не только силу советского строя, но и правильность концепции, согласно которой наука должна развиваться на территории всей страны. Наука, в том числе и математика, смогла решить ряд актуальных проблем обороны страны: были созданы теории, которые позволили разработать действенные меры борьбы с явлениями «шимми» и «штопора» в авиации, предложены статистические методы контроля качества промышленной продукции и статистические методы управления качеством, методы получения большей точности стрельбы по быстро движущимся объектам и многое другое. К концу войны необходимо было срочно разрабатывать теорию кумулятивных зарядов, баллистических ракет, ядерного оружия, современных вычислительных средств. Математики приняли активное участие в решении всех этих проблем.

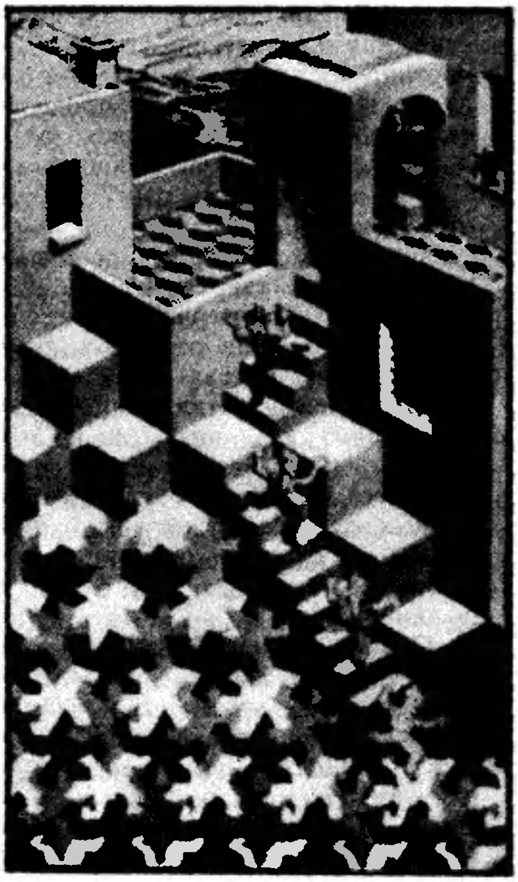
Окончание войны выдвинуло срочные проблемы восстановления народного хозяйства и дальнейшего его развития на новой производственной базе. Требования практики к математике росли буквально с каждым днем, особенно в связи с тем, что вычислительная техника потребовала создания и развития новых ветвей математической науки — программирования, логики, теории автоматов.

Советская математика дала большое число примеров создания общих теорий, вошедших в активный обиход науки и преобразивших лицо больших научных направлений. Достаточно напомнить теорию случайных процессов, родившуюся из запросов статистической физики, телефонии, метеорологии и биологии. Сейчас эта теория является основным направлением развития теории вероятностей и мощным орудием при решении проблем естествознания, техники, теории связи, радиотехники и многих других областей знания. Укажем еще на теорию оптимального управления, превратившуюся в большой раздел современной математики и одновременно являющуюся мощным орудием прикладных исследований. Уместно вспомнить, что в нашей стране родилось новое направление исследований, получившее наименование линейного программирования.

Кто из нас предполагал в предвоенный период, что через какие-нибудь пятнадцать лет человечество изобретет электронные вычислительные машины? Советская наука добилась того, что за короткий срок были предложены новые методы программирования для ЭВМ, и многие тысячи специалистов убедились в их силе для вычислений и для производства логического анализа сложных ситуаций. В настоящее время все союзные республики обладают не только мощными ЭВМ, но и кадрами хорошо подготовленных специалистов, способных творчески их эксплуатировать.

Мы можем гордиться, что за 65 лет, прошедших со времени Великой Октябрьской социалистической революции, и за 60 лет существования Советского Союза во всех республиках созданы математические научные школы.

Сейчас перед Советским Союзом стоит очередная задача — повысить темпы научного прогресса и воспитать молодое поколение в духе творческого искания, в духе веры в свои способности и неограниченную силу человеческого разума. Но для этого необходимо учащимся школы научиться не заучивать, а вникать в смысл изучаемого и использовать узнанное для активного применения. Далее следует приучиться к самостоятельному поиску путей решения сложных задач, чтобы сознание привыкло к самостоятельному мышлению и критическому подходу к задаче и предлагаемым решениям. Только творческий поиск в учебе и при первых самостоятельных шагах в науке позволит молодому поколению математиков внести свой вклад в повышение темпов научного прогресса в нашей стране.



Б. Бокштейн

Атомы блуждают по кристаллу

Около ста лет назад, в 1896 году, английский металлург Вильям Робертс-Аустен проделал такой опыт. Он крепко прижал тонкий золотой диск к отшлифованному торцу цилиндра из чистого свинца, убедился, что контакт достаточно плотный, и поместил эту пару на десять дней в печь при температуре 200°С. Когда отжиг кончился, оказалось, что металлы разъединить уже невозможно. Тогда экспериментатор разрезал составной цилиндр вдоль оси и, посмотрев его под микроскопом, убедился, что золото и свинец проникли друг в друга, произошло перемешивание металлов. Проникновение одного вещества в другое называется диффузией. Именно диффузия приводит к созданию науглероженной зоны в стали, обеспечивает соединение металлов при сварке, пайке, хромировании, никелировании, при спекании порошков и многих других процессах.

Почему атомы (или молекулы) одного вещества проникают внутрь другого? Как рассчитать глубину этого проникновения? От чего она зависит? В этой статье мы попытаемся ответить на эти вопросы.

Почему это происходит?

Диффузия в газах и в жидкостях известна давно. Все хорошо знают, что если в сосуд впустить последовательно порции различных газов, то через некоторое время все газы однородно перемешаются: число частиц каждого сорта в единице объема сосуда станет постоянным, концентрации выравняются. Если в узкую пробирку осторожно налить две смешивающиеся жидкости одну на другую (например, воду и раствор медного купороса), то мы увидим, что поверхность раздела (между светлой водой и темно-голубым купоросом), очень четкая в первый момент, начнет постепенно расплываться. Появится переходная зона, которая будет увеличиваться в размере до тех пор, пока вся жидкость не станет однородной по составу (мы увидим это по однородной окраске). Процесс протекает очень медленно, и если взять столбики жидкостей высотой в несколько сантиметров, то разница окраски (а следовательно, концентраций) в верхнем и нижнем концах пробирки будет заметна еще через сутки после начала опыта. Но в конце концов жидкость станет однородной.

Таким образом, мы приходим к новому определению диффузии: диффузия — это самопроизвольное выравнивание концентраций. Атомы (или молекулы) сорта A перемещаются туда, где их меньше или нет совсем и где больше атомов сорта B, и наоборот. В результате происходит перемешивание.

Однако диффузию в твердых телах до Робертса-Аустена не наблюдал никто. Удивительно это или нет? Ведь мы имеем дело с твердыми телами никак не реже, чем с жидкостями или газами. Почему же так долго не замечали их перемешивания?

Попробуем в этом разобраться.

Почему происходит перемешивание? Что заставляет частицы разных сортов перемешиваться? Ответ на эти вопросы представляется очевидным: перемешивание — результат теплового движения частиц. Но за этим «очевидным» ответом встает законный вопрос: а почему в результате теплового движения частицы не разделяются по сортам? Возьмем пустой сосуд и впустим в него порцию азота и порцию кислорода. Газы перемешаются. Подождем: может быть, через некоторое время они разделятся — в одной половине сосуда будет азот, в другой — кислород? Не тут-то было. Точно так же легко перемешать соль и сахар (тепловое движение тут ни при чем, их надо потрясти), но безнадежно ждать, пока они разделятся снова

Причины, по которым частицы перемешиваются, связаны со стремлением любой системы, состоящей из большого числа частиц, к беспорядку, к хаотическому расположению частиц. Эти причины одинаково действуют и в газах, и в жидкостях, и в твердых телах, приводя к случайным передвижениям, случайным блужданиям частиц, которые создают беспорядок. В этом смысле ничего удивительного в том, что твердые золото и свинец взаимно проникают друг в друга, казалось бы, нет. И тем не менее этот экспериментальный факт чрезвычайно удивителен. Почему?

Вспомним, какие движения совершают частицы в различных агрегатных состояниях вещества. В газах частица до столкновения с другой частицей движется прямолинейно, совершая свободный пробег. После столкновения частица пролетает по новому направлению и с новой скоростью отрезок новой прямой до следующего столкновения. Ясно, что такое движение приводит к перемешиванию, к диффузии.

В жидкости смещения частиц при тепловом движении сопоставимы с их размерами. Однако положения частиц, как и в газе, не фиксированы; частица все время смещается и в результате за достаточно продолжительное время уходит далеко от начального положения. Такое движение также приводит к перемешиванию.

Совсем не так обстоит дело в кристаллических твердых телах. Для кристалла характерно упорядоченное расположение атомов в строго определенных местах — в узлах кристаллической решетки. Кристаллическая решетка — это совокупность повторяющихся совершенно одинаковых геометрических тел, так называемых элементарных ячеек. Сколько бы мы ни «гуляли» по кристаллу, в любом месте все устроено совершенно одинаково.

Основной вид тепловых движений, которые совершают атомы в твердых телах, это малые колебания около положения равновесия — узла решетки. Подчеркнем — **малые.** Амплитуда этих колебаний много меньше расстояния между узлами. У атома, совершающего такие колебания, нет никаких шансов попасть в соседний узел.

В свете всего сказанного взаимное проникновение атомов золота и свинца — вещь удивительная. Как они это делают? Каков механизм перемешивания атомов?

Как это происходит?

Как бы ни были различны механизмы блужданий частиц в газах, жидкостях и твердых телах, важно, что эти блуждания — случайные. Нельзя предсказать заранее, куда полетит молекула газа после очередного столкновения. Она может полететь с равной вероятностью в любом направлении.

Возникает любопытная задача. Пусть в произвольной точке пространства, которую мы примем за начало координат, находится группа частиц, способных совершать только случайные блуждания. Пусть в некоторый момент времени, который мы примем за начало отсчета, все они начинают двигаться. Зададимся вопросом: где будут находиться частицы через время t, как далеко они уйдут от начальной точки?

Чтобы ответить на этот вопрос, сделаем ряд предположений, которые упростят нашу задачу: будем считать, что все частицы движутся только вдоль оси X; каждый очередной шаг частица делает через равные промежутки времени τ (τ — время «оседлой» жизни), и длина каждого шага одна и та же и равна δ; вероятность шага влево и вероятность шага вправо одинаковы и равны $1/2$.

На рисунке 1 приведена как бы моментальная фотография десяти частиц, начавших двигаться одновременно, через время t от начала движения. (Мы поместили частицы в начальный момент на прямую $x=0$.) Ясно, что предсказать местонахождение отдельной частицы через время t нельзя: одни частицы за это время почти не сдвинулись с места, другие ушли довольно далеко. Речь может идти только о смещении, усредненном по всем частицам.

Поскольку для каждой частицы вероятность шагнуть вправо или влево одна и та же, очевидно, что среднее смещение частицы от прямой $x=0$ (то есть сумма смещений всех частиц, деленная на их число) равно нулю, так как число частиц слева и справа от этой прямой будет одинаково и с равной вероятностью смещения могут иметь и положительное, и отрицательное значения. Но ведь в целом положение в группе меняется: сначала все частицы были вместе, а потом все-таки расходятся. Как же охарактеризовать это положение?

Смещения частицы после n шагов и $n+1$ шагов связаны очевидным соотношением

$$x_{n+1}=x_n\pm\delta.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат:

$$x_{n+1}^2=x_n^2+\delta^2\pm2x_n\delta.$$

Это равенство справедливо для любой частицы, поэтому оно справедливо и для средних значений входящих в него величин (напомним, что, говоря о среднем значении, мы имеем в виду усреднение по всему числу

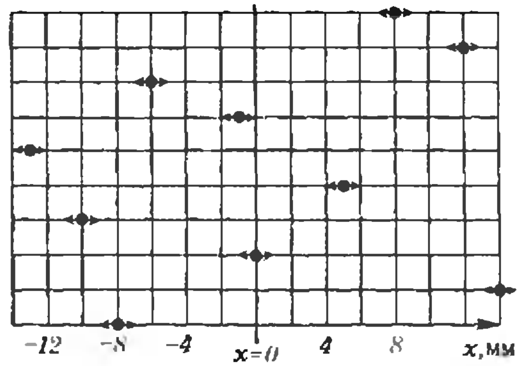


Рис. 1.

частиц):

$$\overline{x_{n+1}^2}=\overline{x_n^2}+\overline{\delta^2}\pm\overline{2x_n\delta},$$

где $\overline{x_n^2}$, $\overline{x_{n+1}^2}$ — средние значения квадрата смещений частицы. (Среднее значение смещения частицы равно нулю — $\overline{x_n}=0$, $\overline{x_{n+1}}=0$, но среднее значение квадрата смещения не равно нулю, так как x^2 положительно независимо от знака x.) Поскольку мы считаем, что длина шага постоянна, значение $\overline{\delta^2}$ равно просто δ^2, а $\overline{x_n\delta}=\overline{x_n}\delta=0$. Следовательно,

$$\overline{x_{n+1}^2}=\overline{x_n^2}+\delta^2.$$

Это соотношение справедливо для любого n; значит, $\overline{x_1^2}=\delta^2$, $\overline{x_2^2}=2\delta^2$, $\overline{x_3^2}=3\delta^2$ и т. д. Таким образом,

$$\overline{x_n^2}=n\delta^2.$$

А теперь вспомним, что каждый очередной шаг частица делает через равные промежутки времени τ. Следовательно, за время t она сделает $n=t/\tau$ шагов, а средний квадрат смещения частицы за время t равен

$$\overline{x_n^2}=\frac{\delta^2}{\tau}t.$$

Можно ввести частоту шагов $\Gamma=\tau^{-1}$. Тогда

$$\overline{x_n^2}=\delta^2\Gamma t.$$

Величина, равная $\sqrt{\overline{x_n^2}}$, характеризует смещение частицы, совершающей случайные блуждания, от начального положения за время t. Назовем эту величину диффузионным путем. Из полученных нами соотношений следует, что диффузионный путь пропорционален корню квадратному из времени:

$$x_{\text{диф}}=\sqrt{\overline{x_n^2}}=\sqrt{\frac{\delta^2}{\tau}}\sqrt{t}=\sqrt{\delta^2\Gamma}\sqrt{t}.\quad(1)$$

Итак, задачу мы решили. Теперь посмотрим, как связаны характеристики случайных блужданий (δ, τ, Γ) с процессом диффузии.

Мы уже говорили, что диффузия — это процесс выравнивания концентраций. Частицы вещества переходят из той части пространства, где их концентрация больше, в ту часть, где она меньше. Следовательно, существует направленное движение этих частиц. Количественной характеристикой этого движения служит величина, называемая диффузионным потоком. Поясним, что это такое.

Представим себе, что в некотором объеме, занимаемом частицами, в какой-то момент времени существуют две области с различными концентрациями частиц. На рисунке 2 вертикальная прямая $x = x_1$ — граница, разделяющая эти области. Слева от границы (в области I) концентрация больше, чем справа (в области II). Процесс выравнивания концентраций будет происходить за счет перехода частиц из области I в область II. Число частиц, проходящих за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси X, и называют диффузионным потоком.

Выражение для диффузионного потока было впервые получено в 1855 году немецким физиком А. Фиком. Фику пришло в голову, что движение вещества вследствие диффузии аналогично распространению теплоты вследствие теплопроводности. Поэтому для описания диффузии можно использовать уравнения, которые еще в 1822 году были написаны французским математиком и физиком Фурье для теплопроводности. «Достаточно, — писал Фик, — заменить в законе Фурье слова «количество тепла» словами «количество вещества» и слово «температура» — словом «концентрация».»

Согласно Фурье тепловой поток, то есть количество тепла, переносимого из одной области тела в другую через единичную площадку в единицу времени, пропорционален разности температур между этими областями (если температуры равны, тепло не переносится) и коэффициенту теплопроводности $\varkappa$. Естественно, что тепло переносится из более нагретой области в менее нагретую.

Рис. 2.

Согласно Фику диффузионный поток направлен из области с большей в область с меньшей концентрацией и зависит от двух факторов: от разности концентраций (много ли надо выравнивать, велик ли стимул для перемешивания) и коэффициента диффузии D. После того как концентрации выравнялись, направленного перемещения частиц вещества уже не происходит, поток равен нулю, но частицы движутся, блуждают.

Коэффициент диффузии — важнейшая характеристика процесса перемешивания. Его значение связано со скоростью случайных блужданий в данном материале. Можно показать, что диффузионный путь и коэффициент диффузии связаны соотношением

$$x_{\text{диф}} = \sqrt{2D}\,\sqrt{t}. \qquad (2)$$

Посмотрим теперь на формулу (1) и сравним ее с формулой (2). Мы видим, что

$$D = \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\tau} = \frac{1}{2}\,\delta^2\Gamma.$$

Множитель 1/2 есть следствие того, что мы разрешили частицам шагать только вдоль линии. Для трехмерной кубической решетки, где можно шагать вдоль любой из трех декартовых осей,

$$D = \frac{1}{6}\frac{\delta^2}{\tau} = \frac{1}{6}\,\delta^2\Gamma. \qquad (3)$$

Мы получили очень важный результат — связь между коэффициентом диффузии D и характеристиками случайных блужданий (δ, τ, Γ): коэффициент диффузии пропорционален квадрату длины шага и частоте шагов диффундирующих атомов и обратно пропорционален среднему времени их оседлой жизни.

Теперь интересно сделать некоторые численные оценки. Как вы думаете: часто ли шагают атомы в кристалле? Довольно ясно, что в общем виде на такой вопрос не ответишь — ответ зависит от природы кристалла, от температуры, может быть, и еще от чего-то. Но, оказывается, некоторые общие закономерности существуют. Так, почти для всех кристаллов коэффициенты диффузии вблизи температуры плавления (но еще в твердом состоянии) приблизительно одинаковы и равны 10^{-8} см^2/с (для разных кристаллов температуры эти, конечно, разные: для свинца — чуть ниже 327°C, для золота — 1063°C, для железа — 1539°C, для вольфрама — 3387°C). Пренебрегая в соотношении (3) численным коэффициентом (нам важны порядки величин) и принимая $\delta = 3\text{Å} = 0{,}3$ нм $= 3 \cdot 10^{-8}$ см, находим, что $\Gamma \approx 10^7$ с$^{-1}$. Следовательно, вблизи температуры плавления атом шагает в кристалле в среднем 10 миллионов раз в секунду.

Много это или мало? Казалось бы, много. Но на самом деле так даже и вопрос ставить нельзя. Пять рублей — это много или мало? Смотря для чего! А один килограмм? С чем сравнивать! Естественно сравнить наши 10^7 с$^{-1}$ со средней частотой колебаний атомов в кристалле ν (ведь колебания — основной вид теплового движения атомов в кристалле). Так вот $\nu \approx 10^{13}$ с$^{-1}$. Таким образом, атом шагает в соседний узел сравнительно редко. Даже не семь раз отмеряет, как в пословице, а миллион раз «поколеблется», а уж потом шагнет. Еще более «осмотрительным» атом становится при охлаждении кристалла. У меди температура плавления 1083°C, и при температуре 1075°C атом меди шагает положенные 10 миллионов раз в секунду, а вот при комнатной температуре время его оседлой жизни составляет, ни много, ни мало, $3 \cdot 10^{12}$ лет, то есть он просто сидит на месте. Вот, кстати, и ответ на вопрос, почему так долго не изучали диффузию в твердых телах. Она очень медленная, и заметить ее (а тем более измерить) можно только при достаточно высоких температурах, да еще с помощью специальных (и довольно сложных) методов.

Еще одна полезная оценка. Сравним смещение атома из исходного положения при диффузии (диффузионный путь $x_{\text{диф}}$) с общим расстоянием, которое он проходит за то же время (x_Σ). В соответствии с уравнением (1) первая величина равна $\delta\sqrt{\Gamma t}$; вторая, очевидно, равна $\delta n = \delta \Gamma t$.

Принимая, как и раньше, $\delta \approx 0{,}3$ нм и $\Gamma \approx 10^7$ с$^{-1}$ (вблизи температуры плавления), найдем, что после 100 часов блужданий $x_{\text{диф}} \approx 0{,}6$ мм, а $x_\Sigma \approx 1$ км, то есть, отшагав в целом километр, атом смещается меньше чем на миллиметр. Вот сколь мала эффективность случайных блужданий по сравнению с направленным движением.

Исследования показали, что коэффициент диффузии быстро растет с увеличением температуры. Сильная зависимость основных характеристик процесса от температуры наблюдается во всех процессах, в которых для перехода из исходного состояния в конечное необходимо преодолеть потенциальный барьер. При случайных блужданиях в кристалле барьер очень высокий, его высота в десятки раз превосходит энергию теплового движения. Вот почему коэффициент диффузии сильно зависит от температуры: чем выше температура, тем легче атомам преодолеть барьер.

Но что это за барьер? И куда шагает атом, если все соседние узлы решетки заняты? Мы возвращаемся к вопросу, сформулированному нами раньше: каков механизм диффузии в кристаллах?

Как же все-таки это происходит?

Ответ на этот вопрос дал один из основоположников физики твердого тела советский физик-теоретик Яков Ильич Френкель.

В своих воспоминаниях, посвященных Френкелю, английский физик Невилл Мотт, возглавлявший много лет знаменитую Кавендишскую лабораторию, писал, что в Англии каждый студент-физик знает о «дефектах по Френкелю». Что же это такое?

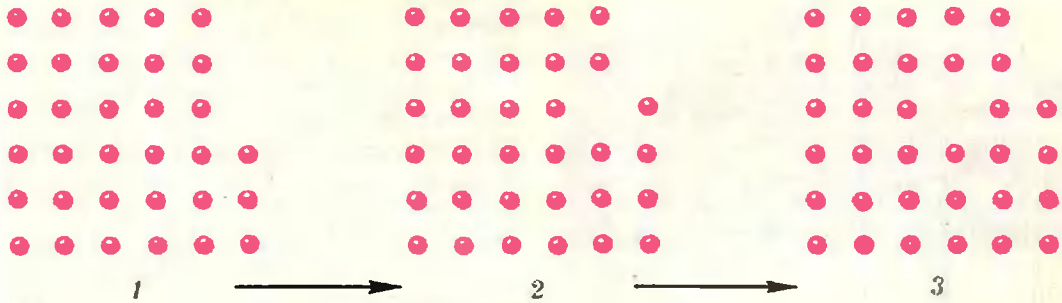


Рис. 3.

Вот как описывает это сам Френкель в статье «О тепловом движении в твердых и жидких телах», опубликованной в 1926 году в немецком журнале «Zeitschrift für Physik» (я приведу длинную цитату с короткими комментариями (в квадратных скобках)). «Предположим, что какой-нибудь атом, набравший случайно избыточную энергию, вырывается из клетки, образованной его соседями, как бы раздвигая «прутья» этой клетки, и вылетает в какую-то внутреннюю полость. [Атомы в кристаллической решетке не занимают всего объема тела, между ними остаются еще свободные промежутки (междоузлия); благодаря этому атомы могут колебаться.] Мы видим, таким образом, что один из узлов окажется вакантным, зато одно из междоузлий окажется занятым. Переходя из одного междоузлия в соседнее, атом может странствовать по всему внутреннему пространству кристалла.

Так как эти нарушения правильности обусловлены тепловым движением, количество вакансий должно быть тем больше, чем выше температура. Около температуры плавления число вакансий может достигнуть примерно одного процента по отношению к числу атомов. [Тут Я. И. Френкель ошибся примерно в 100 раз: около температуры плавления доля вакансий достигает 0,01%, то есть примерно одна вакансия на десять тысяч атомов.]

Не обязательно, чтобы число свободных вакансий в точности равнялось числу междоузельных атомов. Вакансия может возникнуть и проникнуть внутрь кристалла путем перехода одного из атомов на поверхность [последовательные этапы такого процесса изображены на рисунке 3]. Этот механизм можно рассматривать как растворение в кристалле окружающей пустоты. Наличие в кристалле вакансий обеспечивает его атомам подвижность, возможность перемещаться по всему его объему.»

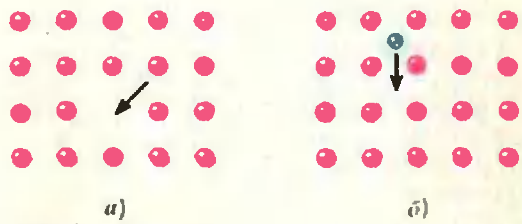


Рис. 4.

Заметьте, что в 1926 году никто этих вакансий и в глаза не видел. Вот вам ярчайший образец абстрактного научного мышления и предвидения. Вакансии «увидели» (тоже, кстати, по идее, высказанной Я. И. Френкелем) много позже — это сделал харьковский физик Б. Г. Лазарев (он опубликовал свою работу в 1956 году). Идея такая: концентрация вакансий сильно растет с температурой. Нагреем металл почти до плавления и резко охладим до комнатной температуры («закалим»). Вакансии не успеют уйти на поверхность и останутся в металле. Разница — большая: в меди при 1075°C (медь плавится при 1083°C) доля вакансий $1{,}3\cdot10^{-4}$, а при 27°C — 10^{-19}. Как всякое нарушение правильности решетки, это приведет к увеличению электрического сопротивления. Его можно измерить и определить концентрацию вакансий.

Таким образом, Френкель придумал два основных механизма диффузии в твердых телах: вакансионный (рис. 4, *а*: атом перемещается, обмениваясь местами с вакансией) и междоузельный (рис. 4, *б*: атом перемещается по междоузлиям). Вторым способом перемещаются маленькие (по размеру) атомы примесей, а вакансионым — все остальные; это — самый распространенный механизм.

Вот мы и ответили на вопрос, как это происходит. Чтобы атом в кристалле шагнул в соседний узел, нужно, чтобы одновременно произошли два события: в этом соседнем узле оказалась вакансия, и атом поменялся с ней местами.

Чего мы еще не знаем?

Теперь мы, вроде бы, можем решать практические задачи. Например, такую: какова глубина науглероженного слоя в стали, если при 900°С коэффициент диффузии углерода $D=10^{-7}$ см^2/с, а время науглероживания — около одного часа? Находим: $x_{диф}=\sqrt{2Dt}\approx 0{,}3$ мм. Ответ — правильный, во всяком случае по порядку величины.

Но вот еще задача. Обмотку электромоторов делают из медной проволоки. В работе проволока разогревается градусов до 200, окисляется, и характеристики электромотора резко ухудшаются, а часто обмотка просто «перегорает». Ясно, что надо ее покрыть чем-нибудь, что не окисляется при 200°С, проще всего — серебром. И процесс такого покрытия — серебрения проволоки — известен. Но толстым слоем покрывать не хочется — серебро дорогое. А тонким опасно: медь продиффундирует сквозь серебро, выйдет наружу, и все начнется сначала. «Как выбрать толщину слоя?» — с таким вопросом приходит технолог к специалисту по диффузии.

Посчитаем вместе. При $T=200°\mathrm{C}\approx 500$ К $D\approx 10^{-19}$ см^2/с. Легко видеть, что слоя в 1 мкм $=10^{-4}$ см хватит больше чем на 1000 лет, то есть

$$t\approx x^2_{диф}/2D>10^3 \text{ лет}.$$

Так мы и отвечаем. Технолог поступает в соответствии с нашим советом и на горьком опыте убеждается, что с наукой что-то не в порядке, потому что через месяц электромоторы начинают «благополучно» выходить из строя.

И вот тут мы вступаем в обширную область исключений из свода диффузионных законов или, если хотите, в область диффузионых «беззаконий».

О многих из них вы сможете узнать, прочитав увлекательную книгу известного советского специалиста по физике кристаллов Я. Е. Гегузина «Очерки о диффузии в кристаллах» (Москва, «Наука», 1970), или в книге автора этой статьи «Атомы блуждают по кристаллу», которую Библиотечка «Квант» предполагает выпустить в 1983 году.

Рассказывают, что...

По воспоминаниям современников, Эйнштейн неоднократно говорил, что свои достижения он объясняет исключительно непреклонным упорством в решении поставленных им перед собой задач. Один из сотрудников Эйнштейна приводит шутливую историю, которая может служить иллюстрацией к этому высказыванию Эйнштейна. (Сам Эйнштейн сказал про эту историю, что она будет неплохим анекдотом о нем.)

Эйнштейн со своим помощником подготовили статью и им понадобилась скрепка, чтобы скрепить бумажные листы. Порывшись во всех ящиках письменного стола, они, наконец, нашли скрепку, но она была совершенно искорежена. Пришлось искать, чем бы ее выпрямить. После новой серии поисков удалось обнаружить целую коробку прекрасных скрепок. Эйнштейн сразу же взял одну из них и принялся изготовлять приспособление для починки скрепки-уродца. На возглас своего ассистента «Что же Вы делаете?» Эйнштейн, несколько замешкавшись, ответил: «Вы видите ...когда я ставлю перед собой какую-то цель, отвлечь меня от нее почти невозможно».

А. Александров

Тупость и гений

Всякий, кто занимался математикой — решая задачи, доказывая теоремы или формируя новые концепции, наверно, имел случай не раз поражаться своей тупости. Думал, думал над задачей — не решил, а узнал решение — подумал: какой дурак! как я не сообразил? А то думал, думал — решил и рад, а все же, бывает, подумаешь: тупица! как я раньше не сообразил?

У ученых-математиков бывает: думаешь, думаешь над теоремой, иногда долго, иной раз и не год, и не два, ищешь доказательство и так, и сяк, и с этого конца, и с другого, ан не выходит, а вышло — удивляешься: дурак! как я раньше не сообразил? ведь по сути это совсем просто. А уж о новых концепциях и говорить не приходится: занимаешься какими-нибудь вопросами, а не приходит в голову посмотреть на них с более общей точки зрения или с другой, так сказать, стороны; не формулируются поэтому общие понятия, проясняющие круг вопросов. А потом, если — такое счастье! — сообразил, то удивляешься: как это раньше тебе в голову не пришло? Ну, а если сообразил кто-то другой, то, как ни радуешься успеху науки, а зло берет: как это я, тупица, сам не додумался!

Поиски решения нестандартной задачи, как и доказательства теоремы, состоят обычно в том, что приходит в голову одно решение или доказательство — неверное! потом — другое: «гениальная идея!»— неверно! третья попытка — неверно! еще бросок на задачу — промах.. и если задача или теорема трудная, то так может длиться долго.

Помню, предложил я*) Иосифу Либерману одну теорему доказать была у меня хорошая гипотеза. Тогда он был студентом — талантливый был парень!— и стал бы крупным геометром, если бы не война: он погиб в августе 1941 г., а в июле в форме морского офицера защитил диссертацию — уже на втором году аспирантуры — такой был талант. Так вот, предложил я ему доказать теорему. Встречаемся через некоторое время, он говорит: доказал, и рассказывает. А я его зацепил: в этом месте почему вы так утверждаете? Ошибка — ушел Иосиф. Опять встречаемся — исправил он ошибку, но дальше опять ошибки. Так я его почти целый год гонял. Но потом он еще подучил топологию и доказал не только мою теорему, но и более сильную, которую уже сам сформулировал.

Таких историй долгих поисков можно рассказать множество. Вот, например, придумал я в 1937 году одну теорему, очень хорошую теорему, и доказал ее при некоторых дополнительных предположениях. Естественно, встал вопрос доказать ее без этих предположений. Вопрос стоит до сих пор — 45 лет. Очень я старался ее доказать и другие очень старались, да не вышло.

И так во всех науках. Бьется филолог над расшифровкой и толкованием текста — и так и сяк... А потом, когда сообразил, тоже, наверно, удивляется, вроде нас, математиков: какой дурак! как это я раньше не сообразил? оно ведь очевидно!

Словом, тот, кто думал, вдумывался, искал, тот знает, насколько туп и несообразителен бывает человек. Сообразительностью своей

*) Автор — видный советский геометр А. Д. Александров, академик АН СССР (*Прим ред.*)

любуются обычно люди, которым не приходилось упорно вдумываться и искать,— легко дается удача тому, кто не ставит перед собою трудных задач, серьезных целей.

И вот я хочу рассказать историю о человеческой тупости и о гении, историю, несравненно более значительную, чем те, о которых я только что говорил. Дело идет об одном из величайших завоеваний человеческого духа, в котором участвовали первоклассные таланты и подлинные гении, без преувеличений. Речь — о неевклидовой геометрии, о ее более чем 2000-летней истории.

История эта очень интересна и поучительна. С ней связано много такого, что касается не математики самой по себе, а свойств, путей и страстей человеческих. Но прежде чем говорить об истории, надо бы объяснить

Что такое геометрия Лобачевского

Ответ, конечно, всем известен: это — геометрия, полученная из геометрии Евклида изменением одной только аксиомы параллельных («Геометрия 6—8», п. 33). Именно, у Лобачевского принимается за аксиому, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходит по крайней мере две прямые, параллельные данной (то есть лежащие с ней в одной плоскости и ее не пересекающие). Утверждения, или, другими словами, теоремы, которые выводятся из так измененных оснований геометрии Евклида, и образуют *геометрию Лобачевского*. Все это, как мы видим, «очень просто» и говорится коротко и ясно. Трудность, однако, в том, что аксиома Лобачевского не соответствует нашему наглядному представлению. Поэтому и выводы из нее — многие теоремы геометрии Лобачевского — оказываются вовсе странными и невообразимыми. Реальный смысл этой геометрии из данного выше ее простого формального определения совершенно не ясен.

Сам Лобачевский называл свою геометрию *воображаемой*. Он смотрел на нее как на теорию, которая могла бы оказаться приложимой к реальному пространству. Но только «могла бы»— реальных же приложений не было. Поэтому и логическая непротиворечивость этой геометрии оставалась не установленной. Ведь как ни развивал ее Лобачевский, а могло бы оказаться, что дальше все-таки обнаружится противоречие.

Реальный смысл и логическая непротиворечивость геометрии Лобачевского вытекают из ее простой модели, придуманной немецким математиком Ф. Клейном. Вот эта модель.

За «плоскость» принимается внутренность какого-либо круга (рис. 1), за «точки»— точки этой внутренности, за «прямые»— хорды — конечно, с исключением концов, поскольку рассматривается только внутренность круга. За «перемещения» принимаются преобразования круга, переводящие его в себя и хорды — в хорды. Соответственно, «конгруэнтными» называются фигуры, переводимые друг в друга такими преобразованиями.

Всякая теорема планиметрии Лобачевского является в этой модели теоремой геометрии Евклида и, обратно, всякая теорема геометрии Евклида, говорящая о фигурах внутри данного круга, является теоремой геометрии Лобачевского. Это общее утверждение доказывается проверкой справедливости в модели аксиом геометрии Лобачевского. То,

Рис. 1.

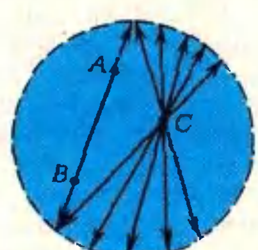


Рис. 2.

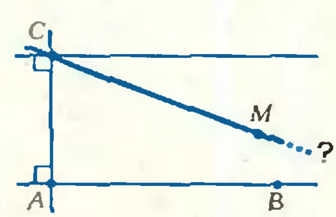


Рис. 3.

что аксиома параллельных не выполняется в этой модели, видно непосредственно: на рисунке 2 через точку C, не лежащую на «прямой» (то есть на хорде) AB, проходит бесконечно много «прямых» (хорд), не пересекающих (AB).

Поэтому, если в геометрии Лобачевского имеется противоречие, то это же противоречие (вернее, его перевод на «язык в круге») имеется и в геометрии Евклида.

Далее, всякая теорема геометрии Лобачевского описывает в модели Клейна некоторые факты, имеющие место внутри круга. Именно факты, если мы берем не абстрактный круг, а реальный круг и реальные хорды и понимаем теоремы как утверждения об этих реальных вещах, взятые, конечно, с той точностью, которая доступна для наших построений. Таким образом, геометрия Лобачевского имеет вполне реальный смысл с той точностью, с какой вообще имеет смысл геометрия в применении к реальным телам.

Стало быть, геометрия Лобачевского настолько непротиворечива, насколько непротиворечива геометрия Евклида, и имеет в такой же степени реальный, экспериментально устанавливаемый смысл.

От Евклида до Лобачевского

Сам Евклид (IV в. до н. э.) принимал в качестве аксиомы параллельных следующее предложение (у Евклида оно было «пятым постулатом»): *Если прямая пересекает две прямые и образует внутренние односторонние углы в сумме меньше двух прямых, то при неограниченном продолжении этих двух прямых они пересекутся с той стороны, где углы меньше двух прямых.* Мы привели эту формулировку Евклида только затем, чтобы можно было убедиться в ее сложности. Другие постулаты гораздо проще и формулируются гораздо короче, начиная с первого: *Через всякие две точки можно провести прямую.*

Естественно возникали попытки освободиться от сложного пятого постулата, вывести его из других основных посылок геометрии. Я думаю, что сам Евклид предпринимал такие попытки и, во всяком случае, в его время уже были такие попытки. Известно упоминание у арабских авторов не дошедшего до нас сочинения Архимеда (III в. до н. э.) «О параллельных линиях», где, надо полагать, пятый постулат выводился из каких-то более простых посылок.

Попытки доказать пятый постулат продолжались с тех пор в течение 2000 лет. Их предпринимало множество ученых. Вот неполный перечень: греки Птолемей (2 в. н. э., тот самый Птолемей, «которого система») и Прокл (5 в.), араб ал-Хайсам (10 в.), перс (или таджик) Омар Хайям (11 в.— начало 12 в., тот самый Хайям, который известен как великий поэт), азербайджанец ат-Туси (13 в.), немец Клавий-Шлюссель (1514; здесь и дальше дата работы) итальянцы Катальди (1603), Борелли (1658) и Витале (1680), англичанин Валлис (1663), итальянец Саккери (1733), немец Ламберт (1766), французы Бертран (1778) и Лежандр (1794, 1823), русский Гурьев (1798). Все их попытки сводились к тому, что пятый постулат выводился из какого-нибудь другого положения. При этом многие не замечали этого, считая, что доказательство им удалось. Другие, более проникновенные и критичные, явно формулировали то положение, из которого выводили пятый постулат, как это сделал, например, Омар Хайям.

Напряжение поисков доказательства с бурным развитием математики в 17—18 вв. возрастало.

Значительные усилия сделал итальянский монах, преподаватель математики и грамматики Джироламо Саккери, труд которого с попыткой доказательства пятого постулата появился в 1733 году — в год его смерти. Он называется «Евклид, очищенный от всех пятен, или же геометрическая попытка установить первые начала всей геометрии». Отправляясь от работ своих предшественников, Саккери пытается доказать пятый постулат от противного — приняв предположение, равносильное отрицанию пятого постулата, он выводил из него следствия, стремясь прийти к противоречию. Но так как отрицание пятого постулата есть аксиома Лобачевского, то выводы, которые получал Саккери, были не более и не менее как теоремами геометрии Лобачевского. Иначе говоря, Саккери развивал новую геометрию, не понимая, однако, того, что делает. К противоречию он не пришел, но все же заключил, что ему удалось доказать пятый постулат, хотя, по-видимому, он не был в этом вполне уверен. Он как бы убеждал сам себя, когда писал о гипотезе, равносильной отрицанию пятого постулата, что он «вырвал эту зловредную гипотезу с корнем».

Из довольно многочисленных (55) появившихся в 18 в. сочинений по теории параллельных особенно выделяется написанная в 1766 г. «Теория параллельных» И. Г. Ламберта, немецкого математика, физика и астронома. Ведя доказательство пятого постулата от противного, Ламберт вывел из его отрицания много следствий. Он, можно сказать, в значительной мере построил основы геометрии Лобачевского. В его выводах не было противоречия, и он не подумал, что нашел его, как это делали почти все его предшественники. Ламберт даже высказал мысль, что он «почти должен сделать вывод», что опровергаемая им гипотеза «имеет место на какой-то мнимой сфере». Но все же он остался уверен, что геометрия, основанная на отрицании пятого постулата, невозможна. Его работа не давала, однако, доказательства этому убеждению. Поэтому, надо думать, он остался ею недоволен и не опубликовал ее. Она была издана только в 1786 г.— через 9 лет после его смерти и через 20 лет после того, как она была написана. В общем Ламберт очень близко подошел к открытию новой геометрии, но не сделал его.

Вплотную подошли к пониманию возможности неевклидовой геометрии немецкие математики Швейкарт (1818) и Тауринус (1825), но ясно выраженной мысли, что намечаемая ими теория будет столь логически законной, как и геометрия Евклида, они все же не высказали.

Гаусс, по его собственному свидетельству, занимался теорией параллельных с 1792 г. и, как видно из его переписки, постепенно приходил к убеждению, что доказательство пятого постулата невозможно. Так, в 1817 г. в письме к Ольберсу он писал: «Я прихожу все более к убеждению, что необходимость нашей геометрии не может быть доказана, по крайней мере человеческим рассудком и для человеческого рассудка». Раз он пишет «прихожу все более», то значит еще не пришел окончательно. Далее он продолжает: «Может быть, в другой жизни мы придем к другим взглядам на природу пространства, которые нам теперь недоступны. До тех пор геометрию приходится ставить не в один ранг с арифметикой, существующей чисто априори, а скорее с механикой...» В то время он далеко развил неевклидову геометрию, но только в 1824 г. в письме к Тауринусу он написал определенно, что неевклидова геометрия, «в которой сумма углов треугольника меньше 180°, совершенно последовательна» и что он «развил ее для себя совершенно удовлетворительно». Однако только в 1831 г. он взялся за то, чтобы изложить, хотя бы кратко, свои выводы, но за всю свою жизнь так ничего и не опубликовал по поводу неевклидовой геометрии. В 1829 г. в письме к Бесселю он писал: «Я опасаюсь крика беотийцев, если выскажу мои воззрения...»*). Он боялся подорвать свой научный авторитет.

Но когда Гаусс писал все это, уже нашелся человек, который не только совершенно удовлетворительно развил геометрию, отрицающую пятый постулат, и не только пришел к убеждению, что эта геометрия совершенно последовательна, но, не убоявшись ничьего крика, доложил все это научному собранию. Это был Николай Иванович Лобачевский, который пришел к убеждению о возможности неевклидовой геометрии еще в 1824 г. и представил доклад с изложением ее начал физико-математическому факультету Казанского университета 23 (11) февраля 1826 года; опубликовал он его в расширенном виде в работе «О началах геометрии» в ряде выпусков «Казанского вестника», научного издания Казанского университета, с февраля 1829 по август 1830 г.

В 1835—38 гг. Лобачевский публикует более развитое изложение своей теории «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», в предисловии к которому пишет:

«Напрасное старание со времен Евклида, в продолжении двух тысяч лет, заставило меня подозревать, что в самих понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать и которую проверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты, каковы, например, астрономические наблюдения». Для Лобачевского вопрос об истинности той или иной геометрии был, стало быть, вопросом опыта; свою геометрию он рассматривал как возможную теорию свойств реального пространства, то есть свойств структуры соответствующих отношений материальных тел и явлений.

Почти одновременно с Лобачевским — в 1825 г.— к той же геометрии пришел молодой венгерский математик Янош Больяи*). Свои выводы Янош Больяи изложил в 1832 г. в качестве приложения (Аппендикса) к учебнику геометрии своего отца Фаркаша Больяи. Фаркаш Больяи послал учебник Гауссу. Тот, одобрительно отозвавшись о результатах Яноша, написал вместе с тем, что все это ему давно известно. Янош, понимавший значение своих открытий, решил, что Гаусс просто приписал их себе. Он надолго прекратил свои занятия неевклидовой геометрией. Но Лобачевский продолжал разрабатывать свою геометрию и публиковать работы с ее изложением вплоть до самой смерти.

Нельзя удивляться, что новая геометрия могла казаться невозможной. Посмотрите на рисунок 3: ясно, что прямая CM, если ее достаточно далеко продолжить, обязательно пересечет прямую AB. Допущение, будто через одну точку проходят две прямые, параллельные данной, совершенно противоречит

*) Беотийцы, жители области Древней Греции Беотии, считались особо глупыми, так что название «беотиец» было нарицательным.

*) Ближе венгерскому произношению — Бойаи, у нас можно встретить также написания: Больяй, Бойай, Бояи.

наглядному представлению. Такое допущение кажется просто нелепым. Никакой неевклидовой геометрии быть не может! Тем более нужно отдать должное смелости мысли Лобачевского и Больяи, которые решились допустить «нелепость». Нелепость с точки зрения наглядного представления — да, но с точки зрения логики — другое дело. Как ни кажется наглядно нелепым допущение многих параллелей, логически оно допустимо. Нужна была большая смелость мысли, чтобы твердо убедиться в этом, хотя теперь, когда найден простой смысл неевклидовой геометрии, никакой смелости мысли не нужно — достаточно самой небольшой способности к отвлеченному мышлению.

От убеждения к доказательству

Итак, Лобачевский и Больяи публично, а Гаусс в письмах выразили убеждение в правомерности неевклидовой геометрии и далеко развили ее. Однако это убеждение основывалось только на том, что в полученных выводах не было противоречий. Но ведь можно было бы думать, что в дальнейших выводах противоречия все же появятся. Реальный смысл новой геометрии оставался совершенно неясным. И пока он не был найден, великое открытие все же висело в воздухе — геометрия Лобачевского оставалась не более чем воображаемой.

В 1839—40 гг. появились две работы профессора Дерптского (ныне Тартуского) университета Ф. Миндинга, в которых он исследовал некоторые специальные поверхности — поверхности постоянной отрицательной кривизны. В этих работах по существу заключался вывод, что геометрия на таких поверхностях есть не что иное, как геометрия Лобачевского. Но этот вывод там не был явно высказан. Интересно, что двумя годами раньше в том же журнале, где были напечатаны работы Миндинга, была опубликована одна из работ Лобачевского!

В 1854 г., при вступлении на должность профессора Геттингенского университета, Б. Риман, как это полагалось, прочел пробную лекцию. Лекция называлась «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии». Она содержала необычайное богатство плодотворных идей — от общей концепции математического пространства до предвидения того, что стало потом общей теорией относительности. Кроме того, в лекции была намечена общая теория некоторого типа пространств (называемых теперь *римановыми*), которые включают, как простейшие частные случаи, пространства Евклида, Лобачевского и так называемые *сферические* пространства. Риман дал чисто аналитическое определение этих пространств; это по существу означало, что геометрия Лобачевского в такой же степени непротиворечива, как и анализ.

Но этого никто не понял, не заметил. Лекция Римана осталась не понятой. И только слушавший ее старый, 77-летний Гаусс ушел, как свидетельствуют, после лекции в глубокой задумчивости. Лекция Римана не была сразу опубликована, ее издали только в 1868 г., через 2 года после его смерти. И тогда она сразу произвела величайшее впечатление, вызвала бурное развитие намеченной в ней теории.

Тогда же, в 1868 г., итальянский математик Бельтрами сделал то, до чего дошел, но чего не сказал Миндинг,— он показал, что геометрия Лобачевского выполняется на поверхностях постоянной отрицательной кривизны.

Однако выводы Бельтрами были аналитическими, далекими от элементарной геометрии, от Евклида. Лишь в 1871 г. Клейн заметил ту модель на круге, о которой шла речь в начале статьи. Позднее Пуанкаре нашел другую интересную модель, связанную с комплексными числами (см. «Квант», 1976, № 3, с. 7).

Так через 40 лет после опубликования первых работ Лобачевского и Больяи их убеждение было доказано и их геометрия получила всеобщее признание.

(Окончание в следующем номере)

В. Френкель

Рыцарь научно-популярной книги

(к столетию со дня рождения Я. И. Перельмана)

Яков Исидорович Перельман любил повторять слова Лапласа: «Предмет математики настолько серьезен, что нужно не упускать случая делать его занимательным». К словам знаменитого французского ученого можно добавить, что не менее серьезен и предмет физики. Всю свою жизнь Я. И. Перельман посвятил тому, чтобы заинтересовать других, и в первую очередь школьников, этими науками. Но не только школьников. Он искренне сетовал на то, что образованные люди — медики и ботаники, физиологи и лингвисты — почти ничего не знают о физике, астрономии, математике. Истинная культура, по его мнению, должна включать в себя знание основ любимых им точных наук.

Расцвет творческой энергии Перельмана совпал с величайшими открытиями в физике и технике. Но для того чтобы в полной мере понять значение и смысл этих открытий, необходима основательная подготовка, знание азов. Вот этому-то он и посвящал свои книги «Занимательная физика» и «Живая математика», «Ракетой на Луну» и «Межпланетные путешествия» и многие-многие другие, которые, безусловно, знакомы читающим эти строки.

Перельман учил обращать внимание на, казалось бы, примелькавшиеся явления или предметы и простыми словами, образами, средствами показывал, какая физика за ними стоит. Составляющие единое целое маленькие этюды, на которые разбиты книги Перельмана, в чем-то схожи со стихотворениями в прозе. Сходство отнюдь не определяется «высоким штилем» — язык его этюдов прост и лаконичен. Привлекают в них изящество, с которым раскрывается физическая подоплека того или иного явления, умение минимальными математическими (арифметическими) средствами подтвердить или опровергнуть физические рассуждения. Часто уже в названиях этюдов заключена некоторая парадоксальность. Вспомните: «Горячий лед», «Вода в решете», «Зрение тремя глазами», «Холод из угля», «Лед, не тающий в кипятке» или «Как мы пьем?», «Умеете ли вы считать?», «Мог ли быть потоп?», «Сколько стоит молния?», «Мог ли Архимед поднять Землю?» и т. д.

Однако еще более парадоксально, что на простые вопросы: «Кто такой Перельман?», «Когда он родился?», «Где жил и работал?», «Как и когда начал писать?»,

Несколько отрывков из книг Я. И. Перельмана публикуются в этом же номере журнала.

«С кем общался?», «Когда и где умер?»— на вопросы, ответы на которые составляют биографию человека, вряд ли смогут ответить многие читатели его книг, люди, умеющие давать ответы на замысловатые вопросы природы. Ни в первых, ни в десятых, ни в двадцатых изданиях книг Перельмана не нашлось места даже для краткой биографической справки об их авторе.

К счастью, сведения о Якове Исидоровиче Перельмане имеются в фондах Ленинградского отделения Архива Академии наук СССР. Архив расположен на Университетской набережной в Ленинграде, рядом со знаменитой Кунсткамерой. В нем хранятся бумаги выдающихся отечественных и иностранных ученых, в частности и тех, имена которых встречаются в книгах Перельмана. Если таких документов — писем, рукописей и т. д.— много, они составляют специальный фонд. Фонд Якова Исидоровича имеет номер 796; он достаточно обширен, и его описание занимает четыре объемистые тетради. Приведенные ниже сведения почерпнуты из этого фонда.

Я. И. Перельман родился 22 ноября 1882 года в Белостоке в семье служащего. В 1901 году он переезжает в Петербург и поступает в Лесной институт (ныне Лесотехническая академия им. С. М. Кирова), где уже учится его старший брат Осип — впоследствии известный писатель Осип Дымов. (Именно из писем О. И. Дымова к младшему брату можно узнать о некоторых подробностях биографии Якова Исидоровича.) Однако не 1901 год, год переезда из провинции в столицу, выделяется Я. И. Перельманом как поворотный в его жизни, а 1899 — от него ведет он отсчет своей жизни писателя, выбравшего точные науки героями своих произведений. В этот год в России, да и в других странах тоже, много писали о комете, которая должна была пролететь неподалеку от Земли, и о порожденном ею потоке метеорных тел. Ходили слухи, как это часто бывает, чуть ли не о конце света, но вот 23 сентября 1899 года в газете «Гродненские губернские ведомости» появилась статья, эти слухи опровергавшая. Называлась она «По поводу ожидаемого метеорного дождя», автором ее был гимназист Яков Перельмен, но фамилию свою он скрыл под псевдонимом. (Впоследствии он часто выступал, публикуя мелкие статьи и заметки, под разными псевдонимами, один из которых звучал характерно: Цыфиркин.) Дело в том, что по уставу гимназий их ученики не имели права публиковать свои произведения в печати вплоть до окончания учебного заведения.

Когда в 1924 году в Ленинграде был напечатан приуроченный к 25-летию научно-популяризаторской деятельности Я. И. Перельмана каталог его сочинений, он открывался отзывом о нем, написанным патриархом русской физики — Орестом Даниловичем Хвольсоном, автором самого известного в 20-е годы курса общей физики. Хвольсон писал: «Автор приобрел вполне заслуженную известность своими популярными сочинениями, между которыми первое место занимает «Занимательная физика». Это, действительно, занимательная книга, интересная даже для специалиста по физике. В ней собран обширный и разнообразный материал; изложение легкое и правильное». Затем в каталоге приводился перечень написанных Перельманом за 25 лет работы 17 книг, причем общий тираж их издания составлял более миллиона экземпляров — по тому времени цифра гигантская. (Для сравнения укажем более поздние цифры: семь изданий первой части «Занимательной физики» составляли в общем 90 000 экз., а имеющееся у автора этих строк 17-е издание (1965 г.) вышло тиражом 100 000 экз.; после этого книга издавалась еще три раза. В 1981 году увидел свет очередной ежегодник, издаваемый ЮНЕСКО — "Index Translationum". В нем собраны сведения обо всех книгах в мире, переведенных в течение 1977 года с одного языка на любой другой. Книги Перельмана в этом году издавались в переводах 17 раз. Они вышли в издательстве «Мир» в СССР, а также в ГДР, Чехословакии, Испании и Японии.)

Для ленинградских школьников 30-х годов Перельман был не только автором полюбившихся книг. С его именем однозначно связывался «Дом занимательной науки» (ДЗН), одним из вдохновителей и организаторов которого был Яков Исидорович. Культурно-просветительный отдел Ленинградского совета депутатов трудящихся передал для организации этого Дома красивое здание дворца Шереметьева на набережной реки Фонтанки. ДЗН был открыт 4 ноября 1935 года. В его залах разместились экспонаты, «реализовавшие» и наглядно демонстрировавшие многие из опытов и примеров, о которых рассказывал Перельман на страницах своих книг. В ДЗН проводились математические и физические олимпиады, организовывались встречи с учеными, туда ходили на экскурсии. В дни школьных каникул он был местом паломничества не только ленинградцев, но и ребят, приезжавших в Ленинград со всей страны. Только в 1938 году его посетило более 100 тысяч человек.

В объемистой папке фонда 796, имеющей номер 33, хранятся письма. Письма деловые и семейные (у Якова Исидоровича был сын Михаил, погибший на фронте в первый год Великой Отечественной войны). Больше всего сохранилось черновиков писем Перельмана разным лицам. Особое внимание привлекает его письмо 1902 года, адресованное известному французскому астроному Камилю Фламмариону. Имя Фламмариона было хорошо знакомо русским читателям на рубеже XIX и XX веков. Только в течение 1900—1902 годов (мы специально выбрали годы, примыкавшие к дате письма) в России вышло девять книг Фламмариона, популяризирующих астрономию; в мире он имел заслуженную репутацию «популяризатора № 1». Наряду с «Астрономией», «Живописной астрономией», «Начатками астрономии», «Маленькой астрономией» и даже... «Астрономией для дам», Фламмарион написал несколько фантастических романов, в том числе «Люмен». Героем этого романа был некий дух Люмен, способный двигаться в мировом пространстве с любыми скоростями, в частности—превышающими скорость света.

В письме студента второго курса Лесного института (где тогда учился Я. И. Перельман) разбираются приписываемые Фламмарионом Люмену ощущения, когда тот приближается к Земле или покидает ее со скоростью, меньшей, равной или большей скорости света. Так, по Фламмариону, Люмен, двигаясь со скоростью, равной скорости света, будет наблюдать «застывшую» картину того, что происходило на Земле во время его отлета. По Перельману — вообще ничего не будет видеть. Действительно, рассуждает Перельман, разве может Люмен испытывать действие несущихся рядом с ним лучей, если он находится по отношению к ним в относительном покое? «Если бы солдат бежал от неприятеля со скоростью пушечного снаряда, то ни одно ядро не в состоянии было бы удариться в него, хотя бы они окружали его черной тучей». Наблюдатель, заключает Перельман, ничего не увидит.

Приведем теперь другую цитату: «Если бы я стал двигаться вслед за лучом света со скоростью c (скорость света в пустоте), то я должен был бы воспринимать такой луч света, как покоящееся, переменное в пространстве электромагнитное поле. Но ничего подобного не существует; это видно как на основании опыта, так и из уравнений Максвелла. Интуитивно мне казалось ясным с самого начала, что с точки зрения такого наблюдателя все должно совершаться по тем же законам, как и для наблюдателя, неподвижного относительно Земли. В самом деле, как же первый наблюдатель может знать или установить, что он находится в состоянии быстрого равномерного движения?».

Возможно, читатели догадались, что это рассуждение принадлежит знаменитому Альберту Эйнштейну. Цитата взята из его «Автобиографических заметок», написанных в 1949 году. В них Эйнштейн вспоминает, что над парадоксом движения со скоростью света он размышлял начиная с 16-летнего возраста, когда впервые на него натолкнулся (в 1895 г.), в течение 10 лет — до 1905 года, когда была создана специальная теория относительности. «В этом парадоксе уже содержится зародыш специальной теории относительности, — продолжает Эйнштейн.— Сейчас, конечно, всякий знает, что все попытки удовлетворительно разъяснить этот парадокс были обречены на неудачу до тех пор, пока аксиома об абсолютном характере времени и одновременности оставалась укоренившейся, хотя и неосознанной в нашем мышлении».

Итак, в 1902 году мысли Перельмана находились в разительном соответствии с предметом долгих размышлений Эйнштейна. Был ли общим источник этих размышлений? Эйнштейн, конечно, мог к тому времени прочесть роман Фламмариона (вышедший первым изданием во Франции в 1878 г.), однако позднее, в апреле 1920 года, беседуя в Берлине со своим первым биографом А. Мошковским и обсуждая этот роман, он с некоторым раздражением говорил о нем. («Фламмарион взял его <парадокс — *В. Ф.*> у других и только популяризировал», — заметил Мошковскому Эйнштейн.)

Мы подробно остановились на этом эпизоде — одном из многих сюжетов, которые могут быть почерпнуты из изучения архива Перельмана, потому что он, этот сюжет, имел своеобразное продолжение.

Во-первых, многие, вероятно, помнят главу «Можно ли поймать пулю?» из «Занимательной физики» Перельмана. Это — замечательная иллюстрация к рассуждению 20-летнего юноши в письме к Фламмариону. (Надо сказать, что в книгах Перельмана рассыпано много автобиографических моментов — помимо тех, в которых он прямо это подчеркивает. Так, в «Живой математике» в этюде «Умеете ли вы считать?» рассказывается о способах подсчета в лесу деревьев разных пород. А «Занимательная геометрия» и вовсе начинается главой «Геометрия в лесу». Теперь, зная, что Яков Исидорович закончил Лесной институт, мы можем догадаться, что соответствующие примеры почерпнуты им из его студенческой практики.)

Во-вторых, и это не менее интересно, и в дальнейшем «мировые линии» (если воспользоваться термином специальной теории относительности) Эйнштейна и Перельмана в какой-то мере пересекались. Не удивительно, что Перельман знал работы гениального физика (о них написано, например, в приложении к одной из его книг) и интересовался его личностью. Существенно, что и Эйнштейн, со своей стороны, не только знал, но и высокого ценил научно-популярные книги Перельмана. Якову Исидоровичу было известно об этом от разных лиц. Так, Осип Дымов в 1943 году писал брату: «Эйнштейн знает о тебе, слышал твое имя. Я говорил с ним о тебе в Берлине еще три года тому назад». В одном из писем А. М. Горькому, говоря о своей книге «Занимательная физика», Перельман писал, что недавно получил «лестный отзыв о ней Альберта Эйнштейна». Эйнштейн мог знать об этой книге, например, от Эренфестов, с которыми дружил и часто виделся. Татьяна Алексеевна Афанасьева-Эренфест, жена знаменитого голландского физика-теоретика Пауля Эренфеста, в письмах Перельману говорила, что вся ее семья «давно уже состоит в числе поклонников Ваших книг,— впрочем, Вы это уже знаете от моего мужа».

В блокированном Ленинграде, в возрасте 59 лет, 16 марта 1942 года Перельман умер, не дождавшись прорыва и снятия блокады. Но его книги — основное дело его жизни — продолжают жить, завоевывая себе все более широкий круг читателей у нас в стране и за ее пределами, приобщая к математике и физике сотни тысяч молодых людей и, как и в прежние годы, определяя для многих и многих выбор их жизненного пути. Завидная для писателя судьба!

А. Боровой, Ю. Климов

Что происходит на границе

В школьном курсе физики не так уж много места отводится явлениям, происходящим на границе жидкости с другой средой, — поверхностному натяжению, смачиванию, капиллярности. Вместе с тем, с этими явлениями связано много интересных наблюдений и опытов, известных с давних времен и придуманных буквально сегодня, очень сложных и совсем простых. О некоторых из них мы и хотим рассказать.
Начнем с очень известного и простого опыта.

Движущаяся «ракета» и расходящиеся кольца

Вырежьте из бумаги «ракету» такой формы, как показано на рисунке 1,*а*. В точку *А* поместите капельку концентрированного мыльного раствора или маленький кусочек мыла. Если теперь опустить ракету на спокойную поверхность воды, то она начнет двигаться.

Вместо «ракеты» можно сделать вертушку в форме буквы S и поместить кусочки мыла в точки *А* и *А′* (рис. 1,*б*). Понаблюдайте, в какую сторону будет вращаться вертушка.

Следующий опыт требует некоторой предварительной тренировки, но зато дает очень красивый результат.

Пером с тушью касаются поверхности чистой воды — по воде расползается окрашенное пятно. Теперь центра этого пятна касаются намыленной палочкой или просто кусочком мыла — пятно разрывается и превращается в тонкое кольцо. Снова его центра касаются пером (можно при этом использовать тушь другого цвета), затем в ход идет намыленная палочка и т. д. На поверхности воды возникает орнамент из разноцветных концентрированных колец (рис. 2). Достаточно осторожно положить сверху промокательную бумагу, и красивые узоры перейдут на нее.

Этот опыт нашел практическое применение. С его помощью в Японии изготовляют бумагу с самыми разнообразными узорами.

Описанные эксперименты легко понять, если поверхность жидкости считать натянутой пленкой. Впервые такую модель предложил известный английский физик Томас Юнг. В декабре 1804 года Юнг написал работу, в которой с помощью аналогии «поверхность жидкости — упругая пленка» объяснялось поведение жидкости в капиллярах. Вскоре модель, подтвержденная новыми наблюдениями и опытами, получила всеобщее признание.

Итак, поверхность чистой воды — натянутая пленка, а мыльная или подкрашенная вода — такая же пленка, но менее упругая. В результате водяная пленка перетягивает мыльную или подкрашенную, увлекая за собой «ракету» или окрашенное тушью кольцо.

Существует много способов экспериментального определения степени «упругости» поверхностной пленки — так называемого коэффициен-

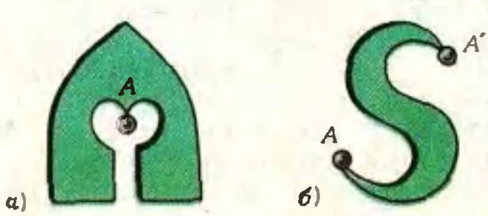


Рис. 1.

Рис. 2.

та поверхностного натяжения σ. Один из наиболее простых — с помощью отрывающихся капель. Если взять пипетку с оттянутым носиком и, наполнив ее водой, осторожно и медленно начать выдавливать каплю, то можно наблюдать, как она постепенно увеличивается, изменяет свою форму и, наконец, отрывается от пипетки (рис. 3).

Заметьте, что капля отрывается только тогда, когда достигает определенных размеров. Пока капля недостаточно велика, поверхностное натяжение удерживает ее на кончике пипетки. Очевидно, что в момент отрыва сила тяжести $m\vec{g}$ капли становится равной по модулю силе поверхностного натяжения $\vec{F}$: $mg = F$. Или (см., например, § 28 учебника «Физика 9», М., «Просвещение», 1982)

$$mg = 2\pi r\sigma,$$

где r — радиус шейки, образующейся у капли перед отрывом.

Отсчитав, скажем, 100 капель и найдя с помощью весов их суммарную массу $M = 100\,m$, можно определить коэффициент поверхностного натяжения жидкости:

$$\sigma = \frac{mg}{2\pi r} = \frac{Mg}{200\pi r}.$$

Но, к сожалению, очень неточно.

Во-первых, нелегко измерить радиус шейки (часто для этого отрывающуюся каплю в увеличенном виде проектируют на экран и там уже производят измерения). Во-вторых, отрыв капли оказывается более сложным процессом, чем просто разрыв шейки (в частности, одновременно с основной каплей образуется еще одна, маленькая капелька). Есть и еще несколько источников ошибок в этом эксперименте. Однако, если мы хотим определить лишь порядок величины σ или качественно сравнить поверхностное натяжение, скажем, чистой воды и мыльного раствора, вполне допустимо воспользоваться пипеткой, а радиус шейки при этом считать равным внутреннему радиусу носика пипетки (измерить последний можно, например, с помощью проволочки известной толщины, плотно входящей в пипетку).

Для справок приведем значения σ в единицах СИ для некоторых

Рис. 3.

жидкостей: вода (при 20°С) — 0,073, раствор мыла в воде — 0,04, оливковое масло — 0,033, керосин — 0,026, ртуть (в воздухе со временем уменьшается) — 0,5—0,4 Н/м.

Рябь на поверхности воды и как ее погасить

Оказывается, благодаря силам поверхностного натяжения возникают так называемые капиллярные волны (то есть рябь на воде). Наблюдать их можно при помощи той же пипетки. Наполните тарелку водой и, держа пипетку на небольшом расстоянии от ее поверхности, капайте воду — быстро разбегающиеся концентрические волны и будут волнами поверхностного натяжения. (Вообще механизм образования и распространения волн на воде — вещь не простая. Здесь участвуют и сила тяжести, и поверхностные явления. Но для объяснения происхождения мелкой ряби вполне можно использовать модель упругой пленки.)

О волнах на поверхности воды в «Кванте», в том числе и в Лаборатории «Кванта», рассказывалось не раз. Советуем вам прочитать, например, такие статьи: С. Соскин, «Капиллярные волны в струе» («Квант», 1976, № 10); Е. Кузнецов, А. Рубенчик, «О волнах на море и ряби на лужах» («Квант», 1980, № 9).

Существует легенда о том, что в древности ловцы жемчуга, добывавшие его со дна Эгейского моря, перед тем как нырнуть, набирали в рот немного оливкового масла. Потом, уже находясь на дне, они выпускали масло, которое поднималось на поверхность и образовывало спокойное «окно», уничтожая рябь на поверхности. Проникающий через «окно» свет позволял ловцам лучше ориентироваться на дне моря.

Вот еще одно интересное наблюдение. «В штилевую погоду на спокойной поверхности моря ясно видны своеобразные узоры, напоминающие муар... Приглядевшись, легко заметить, что в пределах более яркого цветного фона возникает рябь и что светлые пятна и полосы на этом фоне соответствуют участкам поверхности моря, на которых эта рябь погашена»,— писал известный советский геофизик академик В. В. Шулейкин. Под его руководством были проведены опыты по измерению коэффициента поверхностного натяжения морской воды методом отрыва конуса (см., например, лабораторную работу № 2 в «Физике 9»). Они показали, что там, где существует рябь, коэффициент такой же, как у чистой воды, а в области светлых пятен — существенно меньше. Отсюда был сделан вывод, что рябь на поверхности моря гасится пленками жира или каких-то других веществ. Правда, объяснить это оказалось делом не простым.

Как показали исследования, поверхностные пленки гасят, в основном, небольшие волны, но они могут также препятствовать появлению пены на гребнях волн во время шторма. И эта сравнительно скромная «помощь» может сыграть свою роль: «для практики важно погасить лишь пенистые гребни, представляющие иногда серьезную опасность для корабля или тем более для спускаемой шлюпки» (В. В. Шулейкин).

Какую форму имеет капля?

Ответ на этот вопрос зависит от целого ряда обстоятельств. Если бы все определялось только силами поверхностного натяжения, капля всегда принимала бы такую форму, при которой ее поверхность минимальна, то есть форму шара. В условиях земного тяготения под действием силы тяжести капли чаще всего получаются сплюснутыми, лишь очень маленькие капельки остаются сферическими. А нельзя ли исключить силу тяжести, скомпенсировать ее какой-нибудь еще силой?

В 1843 году бельгийский физик Плато поставил опыт, который вскоре получил его имя и вошел во все учебники физики. Плато подобрал концентрацию раствора спирта в воде таким образом, что плотность раствора оказалась равной плотности оливкового масла, и ввел в раствор каплю масла. В этом случае архимедова сила выталкивания уравновешивает силу тяжести капли, а поверхностное натяжение обусловливает ее сферическую форму.

Интересно, что в состоянии невесомости можно получить большие капли-шары различных жидкостей. Такие капли наблюдались, например, во время опытов по электросварке в космосе. Состояли они из расплавленного металла.

В домашних условиях можно повторить опыт Плато, используя касторовое масло и воду. Плотность масла чуть-чуть меньше плотности воды, поэтому если капать в него чистую воду, то медленно опускающиеся водяные капли будут иметь практически шаровую форму. Капли легко окрасить в разные цвета акварельными красками, и тогда в стакане с маслом возникает картина, напоминающая висящие разноцветные шары (см. 1 с. обложки).

Более трудный, но и более эффектный опыт получается с жидкой эпоксидной смолой и раствором соли. Насыпав на дно банки соль, можно получить раствор с убывающей по высоте концентрацией, а следовательно, и плотностью. В таком растворе капля смолы будет висеть на определенной высоте. Рецепт окраски капли предоставляем выбрать самим читателям.

След от высохшей капли

Одно из загадочных на первый взгляд явлений, связанных со смачиванием, возникает при высыхании капли какого-либо раствора. Сделаем такой несложный опыт — поместим на стеклянную пластинку капли раствора соли (не очень концентрированного) и дадим им высохнуть. Естественно, на месте капель образуются светлые пятнышки соли. Так вот, загадочно то, что соль

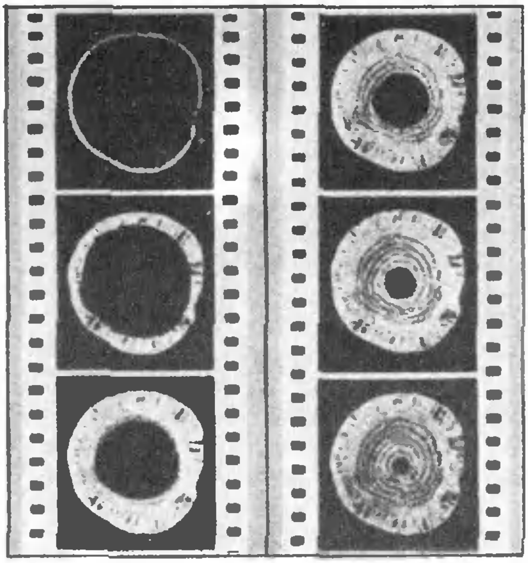


Рис. 4.

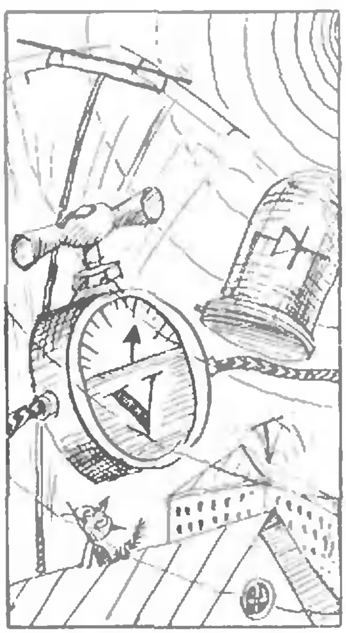
осаждается не равномерным слоем, а в виде чередующихся колец (рис. 4). Оказывается, причиной тому — скачкообразный характер высыхания капли. Для объяснения этого явления мы приведем отрывок из книги Я. Е. Гегузина «Капля» (М., «Наука», 1973), которую, кстати сказать, очень советуем прочитать:

«С каплей происходит следующее. Вода со всей ее поверхности испаряется равномерно. Легко понять, что по мере испарения влаги концентрация растворенной соли будет возрастать и раньше всего кристаллики начнут выпадать там, где избыточная концентрация соли будет наибольшей. Это будет в самой тонкой части капли, то есть вдоль ее периметра. Именно вдоль периметра кристаллики и выпадут. Жидкость капли, смачивая выпадающие кристаллики, как бы приклеивается к ним. Поэтому капля, теряя жидкость, должна менять свою форму, становиться более плоской — ведь ее объем уменьшается, а периметр остается неизменным.

В начале процесса высыхания форма капли, лежащей на стекле, была равновесной. Это означает, что из всех возможных форм осуществилась та, при которой энергия поверхности, граничащей с воздухом и стеклом,— наименьшая при данном объеме капли...

Чем больше испаряется влаги, тем больше искажается форма капли, и на каком-то этапе капля оторвется от кристалликов на периметре и примет равновесную форму. А затем — все сначала..., пока капля не испарится, оставив после себя пятно, состоящее из концентрических колец кристалликов соли».

Курьезы



Приведенные ниже изречения были услышаны от учеников 9—10 классов.

1. Вакуумный диод — это диод, помещенный в вакууме.

2. Вольтметр служит прибором для регулирования силы тока в цепи.

3. Равноускоренным движением называется движение, при котором тело за равные промежутки времени увеличивается на равные величины.

4. При фотоэффекте, если электроны заряжены отрицательно, то они вырываются из металла, если положительно, то поле их удерживает.

5. Солнце — раскаленная планета, расположено от Земли на расстоянии 100 световых лет.

6. Период колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ при переезде из Москвы на Северный полюс изменится потому, что изменится число π.

7. Инфракрасные лучи — невидимые лучи красного цвета.

8. Приемная антенна начинает колебаться при действии на нее электромагнитного поля.

9. Переменное электрическое поле порождает в антенне электроны.

10. Холодный воздух превращается в капельки воды.

Н. Патрикеева

задачник Кванта

Задачи

М771 — М775; Ф783 — Ф787

М771. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK. Известно, что центры окружностей: вписанной в треугольник ABK и описанной около треугольника ABC — совпадают. Найдите углы треугольника ABC.

М772. В мастерской имеется пять различных станков. Обучение одного рабочего работе на одном станке стоит 1000 рублей. С какими наименьшими затратами можно обучить 8 рабочих так, чтобы при отсутствии любых трех из них все станки могли быть одновременно использованы в работе? Каждый рабочий может одновременно работать только на одном станке.

М773. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC в точках M, N и P соответственно. Известно, что

$$\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}.$$

Докажите, что треугольник ABC правильный.

П. Гусятников, С. Резниченко

М774. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[0;\ 1]$, такова, что

$$f(0)=f(1)=0 \qquad (1)$$

и

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)<f(x)+f(y) \qquad (2)$$

для всех $x,\ y\in[0;\ 1]$. Докажите, что:
а) $f(x)\geqslant0$ при всех $x\in[0,\ 1]$;
б) $f(x)$ имеет бесконечно много нулей на отрезке $[0;\ 1]$;
в) если существует такое число $A\geqslant0$, что для всех x; $\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$ выполнено неравенство $f(x)<A$, то $f(x)<A$ для каждого $x\in[0;\ 1]\in$
г)* если функция $f(x)$ непрерывна хотя бы в одной точке x_0 отрезка $[0;\ 1]$, то $f(x)=0$ для всех $x\in[0;\ 1]$;
д)* существуют функции $f(x)$, удовлетворяю-

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 января 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11 — 82» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М771, М772» или «Ф783». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

щие условиям (1), (2), не равные тождественно нулю.

П. Гусятников

М775. При каких натуральных $n \geq 3$ существуют различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такие, что $1 \leq a_k \leq n+1$ для любого $k=1, 2, \ldots, n$ и все n чисел $|a_1-a_2|$, $|a_2-a_3|$, $\ldots$, $|a_{n-1}-a_n|$, $|a_n-a_1|$ различны?

А. Анджан

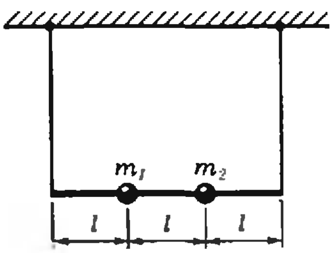


Рис. 1.

Ф783. Горизонтально расположенный невесомый стержень длины $3l$ с закрепленными на нем грузами с массами m_1 и m_2 удерживается в положении равновесия при помощи двух вертикальных нитей (рис. 1). Определить силу натяжения левой нити в первый момент времени, если правую нить перерезают.

С. Кротов

Ф784. На движущееся с постоянной скоростью v тело начинает действовать постоянная сила F. Спустя время τ скорость тела стала равной $v/2$. За следующий такой же интервал времени скорость уменьшилась еще в два раза. Определить, чему будет равна скорость тела спустя интервал времени 3τ с начала действия силы F.

К. Сергеев

Ф785. В стакане с водой плавает кусок льда. На поверхность воды налит слой масла. Как изменится уровень жидкости в стакане, когда лед растает? Куда сместится при этом граница раздела воды и масла?

С. Казаков

Ф786*. В неидеальном одноатомном газе между молекулами действуют силы притяжения. Считая, что потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия пропорциональна плотности газа, то есть $U=\alpha\frac{N}{V}$, где N — число молекул газа, V — объем, занимаемый газом, α — коэффициент пропорциональности ($\alpha<0$), определить разность молярных теплоемкостей газа при постоянном давлении (c_p) и при постоянном объеме (c_V).

В. Тугушев

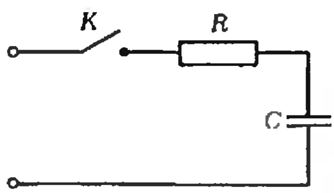


Рис. 2.

Ф787. Напряжение источника меняется со временем по линейному закону. В начальный момент напряжение было равно нулю. С помощью ключа K источник можно подключить к схеме, приведенной на рисунке 2. В какой момент нужно замкнуть ключ, чтобы ток в цепи был постоянным по величине? Сопротивление резистора R, емкость конденсатора C.

А. Зильберман

Problems

M771—M775; P783—P787

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than January 31st, 1983 to the following adress: USSR, Moscow, 103006 МОСКВА, УЛ. ГОРЬКОГО, 32/1, «КВАНТ». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-adressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope worite NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

M771. AK is the bissector of triangle ABC. The centre of the incircle of ABK coincides with the centre of the circumcircle of ABC. Find the angles of triangle ABC.

M772. There are five different lathes in a shop. It costs 1000 roubles to teach a worker to operate one of the lathes. For what minimal cost can 8 workers be instructed to work lathes so that all the lathes can operate simultaneously even if any three of the workers are absent? Each worker can operate only one lathe at a time.

M773. The incircle of triangle ABC touches its sides AB, BC and AC at the points M, N and P respectively. It is known that $\vec{AN}+\vec{BP}+\vec{CM}=\vec{0}$. Prove that ABC is equilateral.

P. Gusiatnikov, S. Reznichenko

M774. The function $f(x)$ defined on the closed interval $[0; 1]$ satisfies the relations

$$f(0)=f(1)=0 \qquad (1)$$

and

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < f(x)+f(y) \qquad (2)$$

for all x, $y\in[0; 1]$. Prove that
a) $f(x)\geqslant 0$ for all $x\in[0; 1]$
b) $f(x)$ has an infinite number of zeros on $[0; 1]$
c) if there exists a number $A>0$ such that $f(x)\leqslant A$ for all $x\in[0; \frac{1}{2}]$, then $f(x)\leqslant A$ for all $x\in[0; 1]$
d)* if $f(x)$ is continuous at least at one point $x_0\in[0; 1]$, then $f(x)\equiv 0$ (for all $x\in[0; 1]$)
e)* there exist functions $f(x)$ satisfying conditions (1) and (2) which do not vanish identically.

P. Gusiatnikov

M775. For what natural $n\geqslant 3$ do natural numbers a_1, a_2, ..., a_n such that $1\leqslant a_k\leqslant n+1$ for all $k=1, 2, ..., n$ exist, the n numbers $|a_1-a_2|$, $|a_2-a_3|$, ..., $|a_{n-1}-a_n|$, $|a_n-a_1|$ being all distinct?

A. Andjan

P783. A horizontal weightless rod of length $3l$ with weights of masses m_1 and m_2 fixed on it is held in equilibrium by two vertical strings (see figure Рис. 1, p. 27). Determine the tension in the left string at the moment the right one is cut.

S. Krotov

P784. A constant force F begins to act on a body moving with constant velocity v. After time τ the velocity becomes equal to $v/2$. After the next time interval τ, the velocity again decreases by half. Find the velocity of the body after the time interval 3τ (from the moment the force F began to act) elapses.

K. Sergeev

P785. A piece of ice floats in a glass of water, on the surface of which there is a layer of oil. How will the level of liquid in the glass change when the ice melts? In what direction will the boundary between oil and water be shifted?

S. Kazakov

Р786. Forces of attraction between molecules act in a nonideal single atom gas. Assuming that the potential energy of molecular interaction is proportional to the gas density, i. e. $\Pi = a\frac{N}{V}$, where N is the number of gas molecules, V the volume of gas, a a coefficient ($a<0$). Find the difference between the molar heat capacities at constant pressure (c_p) and at constant volume (c_V).

V. Tugushev

Р787. The voltage of a source varies linearly. At the initial moment it was zero. The switch K can be used to connect the source to the circuit shown on figure Рис. 2, p. 27). At what moment should the switch be turned on to make the current in the circuit constant? The resistance is R, the capicity is C.

A. Zilberman

Решения задач

М746—М749; Ф758—Ф767

М746. *Бумажный квадрат складывается пополам по некоторой прямой l, проходящей через его центр, в (невыпуклый) девятиугольник. Как нужно провести прямую l, чтобы:*

а) полученный девятиугольник имел наибольшую площадь?

б) в нем помещалась окружность наибольшего возможного радиуса?*

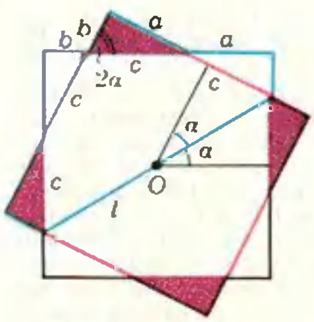


Рис. 1.

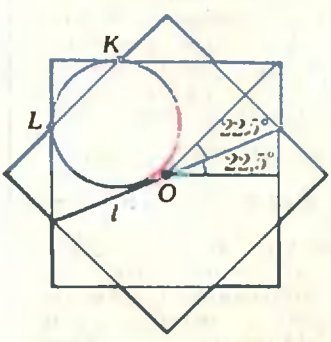


Рис. 2.

Пусть прямая l, по которой складывается квадрат, образует с его горизонтальной стороной угол $\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant45°)$, длина стороны квадрата — $2q$.

а) Если фигуру, полученную складыванием квадрата по прямой l, дополнить симметричной (относительно центра квадрата O или относительно прямой l — все равно!), то получится изображенный на рисунке 1 многоугольник — объединение квадрата с повернутым на угол 2α. Он имеет четыре оси симметрии. Чтобы выяснить, когда его площадь максимальна, заметим, что его можно получить, дополнив исходный квадрат $2q\times2q$ четырьмя одинаковыми розовыми прямоугольными треугольниками. Гипотенузу c и катеты a, b каждого из них легко найти, заметив, что $a+b+c=2q$, $a=c\sin2\alpha$, $b=c\cos2\alpha$, откуда $c=2q/(1+\sin2\alpha+\cos2\alpha)=2q/(1+\sqrt{2}\cos(45°-2\alpha))$; площадь треугольника равна $q(q-c)$ и максимальна при $\alpha=22{,}5°$, когда гипотенуза c минимальна. Таким образом, 16-угольник на рисунке 1 имеет максимальную площадь $8q^2(2-\sqrt{2})$, когда он имеет форму «звездочки» с 8 осями симметрии (рис. 2); при том же угле $\alpha=22{,}5°$ наибольшую площадь имеет и его половинка.

б) Ответ: наибольшая окружность в сложенном квадрате помещается при $\alpha_0=2\operatorname{arctg}2-90°\approx36{,}87°$; ее радиус r_0 равен $5q/8$, а соответствующая прямая l делит сторону квадрата в отношении 1:7. Подтвердить этот ответ помогает геометрический эксперимент: если через каждые 2° или 3° (от $\alpha=0°$ до $\alpha=45°$) поточнее построить соответствующий чертеж (удобно вырезать из картона большой квадрат, проткнуть его в центре кнопкой и использовать для построения основного и повернутого квадрата, а наибольшую окружность — для каждого α — строить «циркулем и линейкой»), можно достаточно точно построить график зависимости радиуса наибольшей окружности r от α (рис. 3). На графике этой функции выделяется несколько особых точек α_i — отрезок $0°\leqslant\alpha\leqslant45°$ делится на 5 кусочков, на каждом из которых наибольшая окружность определяется разными геометрическими условиями, так что ее радиус выражается разными (иногда — весьма громоздкими) формулами. Одной из этих особых точек является и α_0, поэтому в точке α_0 функция $r=r(\alpha)$ не имеет производной, и приходится оценивать ее отдельно на разных кусочках.

На рисунках 2, 4—7 показаны некоторые этапы «эволюции» наибольшей окружности при изменении α от 0° до 45°. Глядя на них, нетрудно представить и остальные: при $\alpha=0°$ годится любая окружность, касающаяся длинных сторон прямоугольной половины квадрата; при

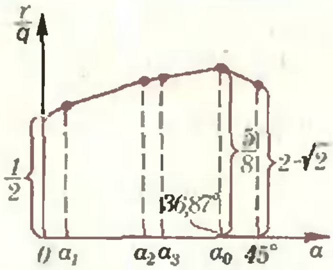


Рис. 3.

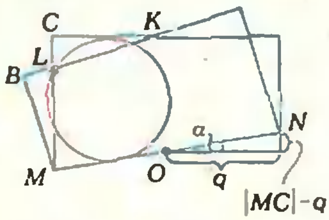


Рис. 4. $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$

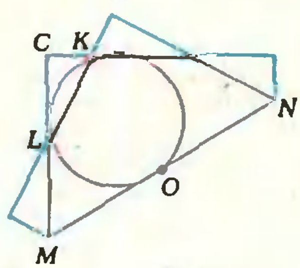


Рис. 5. $\alpha_3<\alpha<\alpha_0$

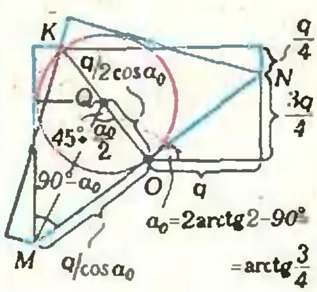
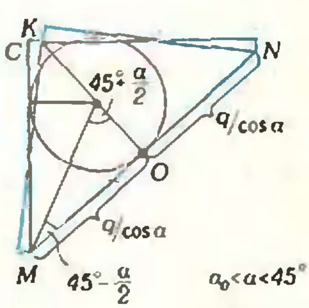


Рис. 6. $\alpha=\alpha_0$



$\alpha_0<\alpha<45°$

Рис. 7.

$0°<\alpha<\alpha_1$ окружность касается прямых $l=(MN)$, MB и CK, точка L лежит вне ее; при $\alpha=\alpha_1$ точка L попадает на окружность: случай $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$ показан на рисунке 4; при $\alpha_2\leqslant\alpha\leqslant\alpha_3$ окружность касается l и проходит через точки L и K, причем при $\alpha=\alpha_2$ она касается (CK) в точке K, а при $\alpha=\alpha_3$ — касается (MC) в точке L; сюда относится и «звездочка» (рис. 2); остальные случаи показаны на рисунках 5, 6 и 7.

Докажем, что радиус окружности всегда не больше $5q/8$, причем равенство имеет место только при $\alpha=\alpha_0$. Некоторые подробности рассуждений мы опустим, но их нетрудно восстановить по надписям на рисунках.

При $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant 45°$ все просто: наибольшая окружность касается прямой l в точке O и касается двух сторон девятиугольника, симметричных относительной прямой OK; ее радиус r равен (рис. 7)

$$r=q\,\mathrm{tg}(45°-\alpha/2)/\cos\alpha=q/2\cos^2(45°-\alpha/2)=$$
$$=q/(\cos(90°-\alpha)+1)$$

и, очевидно, при уменьшении α от 45° до α_0 увеличивается (от $(2-\sqrt{2})q$ до $5q/8$); значения α_0 и r_0 можно определить из треугольников ONQ и ONK на рисунке 6.

Случай малых α также не вызывает трудностей: ясно, что, пока наибольшая окружность касается (CK), ее диаметр не превосходит $|MC|$ (рис. 4). Если $|MC|<5q/4$, то есть $\alpha<\mathrm{arctg}\,1/4\approx 14{,}43°$, то тем более $r<\frac{1}{2}|MC|<5q/8$.

Для значений α, при которых наибольшая окружность проходит через точку L, то есть для $\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_3$, в качестве оценки для ее радиуса можно взять радиус окружности, проходящей через точки K, L и O (см. рис. 4), равный $|KL|/2\sin\widehat{KOL}=c/2\sin 45°=q/\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos(45°-2\alpha)\right)$ (см. решение пункта а)). Этот радиус не превосходит $5q/8$ при $\cos(45°-2\alpha)\geqslant\frac{8}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}8929$, то есть $9{,}12°<\alpha<35{,}88°$. Поскольку этот интервал перекрывается с предыдущим, тем самым проверены все значения α от 0° до, по крайней мере, α_3.

Осталось доказать, что $r<r_0=5q/8$ на участке $[\alpha_3;\ \alpha_0]$, где наибольшая окружность расположена так, как показано на рисунке 5. Зафиксируем окружность радиуса r_0 и докажем, что если пристроить к ней наш сложенный квадрат так, чтобы она оказалась вписанной в угол CMO, то точка K окажется внутри окружности (или на ней при $\alpha=\alpha_0$). Это и значит, что поместить в нашу фигуру окружность большего радиуса невозможно.

Сторону MO мы будем рисовать горизонтальной и касающейся окружности радиуса r_0 в ее нижней точке T (рис. 8). Для того, чтобы построить точку $K=K(\alpha)$, нужно от точки T отложить влево отрезок TM длины $r_0\mathrm{tg}(45°+\alpha/2)$ (напомним, что $\widehat{OMC}=90°-\alpha$) и затем вправо-вверх — отрезок MK длины $q\sqrt{2}/\cos\alpha$ под углом 45° к MO ($\triangle OMK$ — прямоугольный равнобедренный, а $|OM|=q/\cos\alpha$). При $\alpha=\alpha_0$ точка K попадает в верхнюю точку круга; при уменьшении α она совершает движение со скоростью, равной векторной сумме двух скоростей: одна — вдоль прямой MO — направлена вправо и имеет величину $u=r_0\left|\mathrm{tg}\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)'\right|=r_0/2\cos^2(45°+\alpha/2)=r_0/(1-\sin\alpha)$, другая — вдоль прямой $K(\alpha)M(\alpha)$ — направлена влево-вниз и равна по величине $v=q\sqrt{2}\,|(1/\cos\alpha)'|=q\sqrt{2}\sin\alpha/(1-\sin^2\alpha)$ (роль времени играет величина $\alpha_0-\alpha\geqslant 0$). Нас интересует лишь небольшой участок значений α вблизи α_0; но даже если продолжить это движение точки K до $\alpha=0°$, она не выйдет за пределы круга, поскольку (при $\alpha=0°$) $\sqrt{2}\,q=|MK|<r_0(\sqrt{2}+1)$. Если еще заметить, что отношение u/v возрастает при умень-

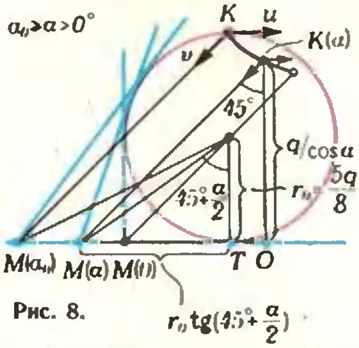


Рис. 8.

М747. *а) Сумма n чисел равна 0, сумма их модулей равна a. Докажите, что разность между наибольшим и наименьшим из них не меньше $2a/n$.*

б) Внутри выпуклого n-угольника $A_1A_2...A_n$ выбрана точка O так, что сумма векторов $\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2 + ... + \overrightarrow{OA}_n$ равна нулевому вектору, а сумма их длин равна d. Докажите, что периметр этого n-угольника не меньше $4d/n$.*

в) Можно ли улучшить эту оценку (при некоторых n)?*

шении α от α_0 до 0°, то становится ясным, что вектор скорости точки K поворачивается против часовой стрелки, то есть траектория обращена выпуклостью вниз и, значит, никак не может попасть на границу круга. С подобным «кинематическим» подходом к решению геометрических задач (заменяющим в данном случае довольно громоздкие аналитические оценки) можно познакомиться подробнее в книжке Ю. И. Любича и Л. А. Шора «Кинематический метод в геометрических задачах» (М., «Наука», 1966) из серии «Популярные лекции по математике».

Н. Васильев

◆

а) Пусть среди данных чисел имеется k положительных и x — наибольшее из них. (Можно считать, что $k>0$, так как иначе все числа равны 0 и утверждение задачи очевидно.) Если s — сумма всех положительных чисел, то $s \leqslant kx$. Аналогично, если s_1 — сумма всех неположительных чисел, а y — наименьшее из них, то $s_1 \geqslant (n-k)y$. По условию $s+s_1=0$ и $s-s_1=a$, поэтому $s=-s_1=\frac{a}{2}$. Следовательно,

$$x-y \geqslant \frac{s}{k} - \frac{s_1}{n-k} = \frac{n}{k(n-k)} \cdot \frac{a}{2}.$$

Число $k(n-k)$ максимально при $k=n/2$, если n четно, и при $k=(n\pm1)/2$, если n нечетно. Поэтому $x-y \geqslant 2a/n$ при четном n и $x-y \geqslant 2an/(n^2-1) > 2a/n$ при нечетном n.

б) Первое решение. Пункт а) по сути дела является «вырожденным» случаем пункта б). Мы увидим, что общий случай можно свести к этому вырожденному с помощью проекции. Для этого нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, доказательство которого основано на приеме «усреднения», полезном при решении многих задач.

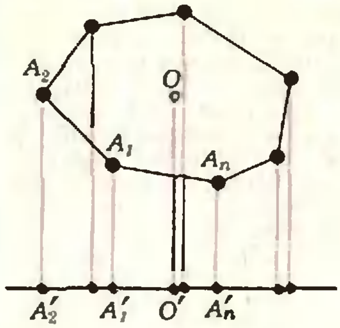
Лемма. *Пусть сумма длин проекций векторов $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ на любую прямую больше суммы длин проекций векторов $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_m$ на ту же прямую. Тогда $|\vec{a}_1| + ... + |\vec{a}_n| > |\vec{b}_1| + ... + |\vec{b}_m|$.*

Доказательство. Фиксируем некоторую ось l_0. Пусть $a(\varphi)$ — длина проекции вектора $\vec{a}$ на прямую, образующую угол φ с осью l_0. Если вектор $\vec{a}$ образует угол α с этой осью (углы φ и α отсчитываются в одном и том же направлении), то $a(\varphi) = |\vec{a}| \cdot |\cos(\varphi-\alpha)|$. Заметим, что интеграл от 0 до π функции $a(\varphi)$ зависит только от длины вектора $\vec{a}$. Действительно, поскольку эта функция периодична с периодом π, отрезок интегрирования $[0; \pi]$ можно заменить на любой другой отрезок длины π; следовательно *),

$$\int_0^\pi a(\varphi)\,d\varphi = \int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\alpha+\frac{\pi}{2}} |\vec{a}| \cdot |\cos(\varphi-\alpha)|\,d\varphi =$$

$$= |\vec{a}| \int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\alpha+\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi-\alpha)\,d\varphi = |\vec{a}| \sin(\varphi-\alpha) \Big|_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\alpha+\frac{\pi}{2}} =$$

*) По существу, мы доказываем сейчас, что среднее значение функции $a(\varphi)$ — длины проекции вектора на всевозможные оси — равно $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi a(\varphi)\,d\varphi = 2|\vec{a}|/\pi$. Подробнее об этом см. статью Ю. Ионина и А. Плоткина «Среднее значение функции» («Квант», 1977, № 7).



$$=|\vec{a}|\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=2|\vec{a}|.$$

Поэтому

$$|\vec{a}_1|+\ldots+|\vec{a}_n|=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(a_1(\varphi)+\ldots+a_n(\varphi))d\varphi\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(b_1(\varphi)+\ldots+b_m(\varphi))d\varphi=|\vec{b}_1|+\ldots+|\vec{b}_m|.$$

Пусть теперь A_1', ..., A_n' и O' — проекции точек A_1, ..., A_n и O на произвольную прямую (см. рисунок). Согласно лемме нам достаточно доказать, что

$$p'=|A_1'A_2'|+|A_2'A_3'|+\ldots$$
$$\ldots+|A_n'A_1'|\geqslant\frac{4}{n}(|O'A_1'|+\ldots+|O'A_n'|). \quad (*)$$

Заметим, что $\overrightarrow{O'A_1'}+\ldots+\overrightarrow{O'A_n'}=\vec{0}$, так как сумма проекций нескольких векторов равна проекции их суммы. Поэтому координаты точек A_1', ..., A_n' на числовой оси l с началом координат O' образуют набор чисел, удовлетворяющий условию пункта а). Сумма a абсолютных величин этих чисел равна сумме в правой части неравенства (*), а разность между наибольшим и наименьшим из них — длине проекции многоугольника, то есть половине суммы p' длин проекций всех его сторон. В силу утверждения а) $p'/2\geqslant 2a/n$ и неравенство (*) доказано.

Второе решение. (Это решение предложил ученик 10-го класса ФМШ № 18 г. Москвы *С. Матюшов.*) Для любой точки A

$$\overrightarrow{OA}=\frac{1}{n}((\overrightarrow{OA}_1+\overrightarrow{A_1A})+\ldots+(\overrightarrow{OA}_n+\overrightarrow{A_nA}))=$$

$$=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OA}_1+\ldots+\overrightarrow{OA}_n)+\frac{1}{n}(\overrightarrow{A_1A}+\ldots+\overrightarrow{A_nA})=$$

$$=\frac{1}{n}(\overrightarrow{A_1A}+\ldots+\overrightarrow{A_nA}).$$

Отсюда сразу следует неравенство

$$|OA|\leqslant\frac{1}{n}(|AA_1|+\ldots+|AA_n|).$$

Полагая в нем последовательно $A=A_1$, $A=A_2$, ..., $A=A_n$ и складывая все полученные неравенства, мы найдем, что

$$d=|OA_1|+\ldots+|OA_n|\leqslant\frac{2}{n}\sum|A_iA_j| \qquad (**)$$

(каждое слагаемое $|A_iA_j|$, $1\leqslant i<j\leqslant n$, входит в сумму один раз, так что она представляет собой сумму длин всех сторон и диагоналей многоугольника).

При нечетном n имеется n сторон, n диагоналей, отсекающих 1 вершину, n диагоналей, отсекающих 2 вершины, ..., n диагоналей, отсекающих $\frac{n-3}{2}$ вершин. Длина диагонали, отсекающей k вершин, не превосходит длины $(k+1)$-звенной ломаной из сторон многоугольника, соединяющей концы диагонали. Поэтому сумма длин всех таких диагоналей не больше $(k+1)p$, где p — периметр многоугольника и (**) переписывается так:

$$d\leqslant\frac{2}{n}\left(p+2p+\ldots+\frac{n-1}{2}p\right)=\frac{n^2-1}{4n}p,$$

то есть $p\geqslant\frac{4n}{n^2-1}d$.

Для четного n отличие в том, что число диагоналей, отсекающих $n/2$ вершин, равно $n/2$. Поскольку длина каждой из них не больше $p/2$, из (**) получаем

$$d \leqslant \frac{2}{n}\left(p+2p+\ldots+\frac{n-2}{2}p+\frac{n}{4}p\right)=\frac{n-2}{4}p+\frac{1}{2}p=\frac{n}{4}p,$$

то есть $p \geqslant 4d/n$.

в) Из решения пункта б) следует, что при нечетных n оценка точнее: $p \geqslant \frac{4n}{n^2-1}d > \frac{4d}{n}$. Дальнейшее уточнение невозможно. Действительно, пусть $n=2k$ или $n=2k+1$. Рассмотрим вырожденный «n-угольник», k вершин которого находятся в одной точке, а остальные $n-k$ — в другой. Легко видеть, что отношение p/d для такого «n-угольника» в точности равно $4/n$ при $n=2k$ и $4n/(n^2-1)$ при $n=2k+1$. Ясно, что можно чуть-чуть раздвинуть его вершины так, чтобы образовался «настоящий» выпуклый n-угольник, при этом величина p/d будет сколь угодно мало отличаться от указанных нами границ.

В. Прасолов

◆

М748. *а) Можно ли разместить на плоскости конечное число парабол так, чтобы их внутренние области покрыли всю плоскость? (Внутренней областью параболы мы называем выпуклую фигуру, границей которой служит эта парабола.)*

б) В пространстве расположено несколько непересекающихся конусов. Докажите, что их нельзя переместить так, чтобы они покрыли все пространство. (Конусом мы называем здесь неограниченную выпуклую фигуру, полученную в результате вращения некоторого угла вокруг его биссектрисы.)*

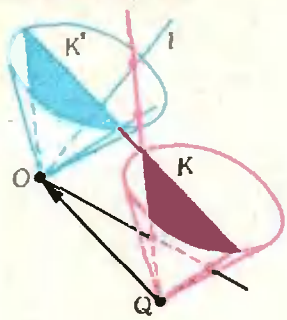


Рис. 1.

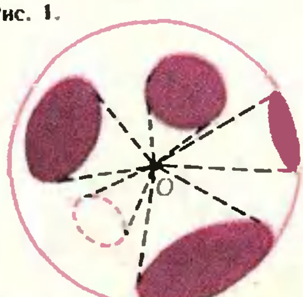


Рис. 2.

а) Проведем произвольную прямую, не параллельную ни одной из осей парабол. Такая прямая может пересекаться с внутренней областью любой из парабол только по интервалу. В самом деле, уравнение параболы в некоторой системе координат имеет вид $y=ax^2$ $(a>0)$, а уравнение прямой — $y=kx+l$; абсциссы точек прямой, принадлежащих внутренности параболы, удовлетворяют неравенству $kx+l>ax^2$, множество решений которого либо пустое, либо — интервал $x_1<x<x_2$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2-kx-l=0$.

Отсюда следует, что на проведенной прямой найдутся точки, не принадлежащие ни одной из внутренних областей парабол.

б) Пусть O — произвольная точка пространства и K' — конус, полученный из конуса K с вершиной Q параллельным переносом, переводящим точку Q в точку O. Проведем произвольный луч l с началом в точке O. Рассмотрим сечения конусов K и K' плоскостью, проходящей через луч l и точку Q (рис. 1). Она пересекает конусы по двум углам с параллельными сторонами; пользуясь этим, легко убедиться, что луч l пересекается с конусом K по лучу тогда и только тогда, когда он целиком содержится в конусе K'. В противном случае луч l пересекается с конусом K по отрезку или по одной точке Q или вовсе не пересекается.

Перенесем теперь вершины всех конусов в точку O и докажем, что никакие два конуса полученного «букета» не имеют общих точек, кроме точки O.

Предположим, что это не так, и какие-то два конуса K_1' и K_2' имеют общую точку $A \neq O$. Тогда луч $l=[OA)$ содержится в каждом из них. Как было показано, в этом случае луч l пересекается с конусом K_1 по некоторому лучу l_1, а с конусом K_2 — по лучу l_2. Но тогда точки луча $l_1 \cap l_2$ принадлежат обоим конусам K_1 и K_2. Противоречие.

Рассмотрим теперь сферу с центром в точке O. С каждым из конусов «букета» она пересекается по некоторой «сферической шапочке» (рис. 2). Так как все такие «шапочки» попарно не пересекаются, их суммарная площадь меньше площади сферы. Поэтому, как бы мы их ни перемещали по сфере, покрыть ими всю сферу невозможно. Это значит, что при любом расположении конусов в пространстве на сфере найдутся точки, не покрытые «шапочками». Если A — такая точка, то луч $[OA)$ может пересекаться с конусами только по конечному числу отрезков. Поэтому на этом луче заведомо найдутся точки, не принадлежащие ни одному из конусов.

А. Кузьминых

M749*. *а) Докажите, что если x_1, x_2, x_3 — положительные числа, то*

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}\geqslant\frac{3}{2};$$

при каком условии это неравенство превращается в равенство?

б) Докажите, что если x_1, x_2, ..., x_n ($n\geqslant 4$) — положительные числа, то

$$\frac{x_1}{x_2+x_n}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\dots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_{n-2}}+\frac{x_n}{x_1+x_{n-1}}\geqslant 2,$$

причем равенство возможно только при $n=4$.

в) Докажите, что при $n>4$ неравенство пункта б) является точным в том смысле, что ни при каком n число 2 в правой части нельзя заменить на большее.

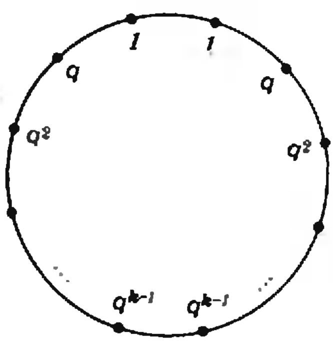


Рис. 1.

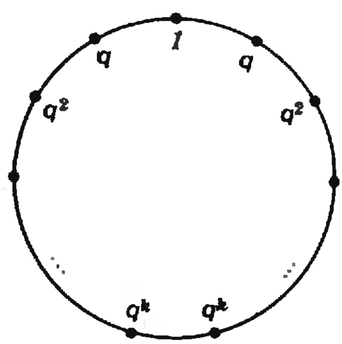


Рис. 2.

а) Пусть $a=x_2+x_3$, $b=x_3+x_1$, $c=x_1+x_2$. Тогда $x_1=\frac{b+c-a}{2}$, $x_2=\frac{a+c-b}{2}$, $x_3=\frac{a+b-c}{2}$, и левая часть неравенства перепишется так:

$$\frac{b+c-a}{2a}+\frac{a+c-b}{2b}+\frac{a+b-c}{2c}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)-\frac{3}{2}.$$

Каждая из скобок в этом выражении не меньше 2 в силу известного неравенства $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$ при $x>0$. Поэтому вся левая часть не меньше $3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$. А так как $x+\frac{1}{x}=2$ только при $x=1$, доказанное неравенство обращается в равенство только при $a=b=c$.

б) Докажем неравенство индукцией по n. При $n=4$ оно очевидно:

$$\frac{x_1}{x_2+x_4}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_4+x_2}+\frac{x_4}{x_1+x_3}=$$

$$=\frac{x_1+x_3}{x_2+x_4}+\frac{x_2+x_4}{x_1+x_3}\geqslant 2;$$

равенство возможно в том и только в том случае, когда $x_1+x_3=x_2+x_4$.

Докажем теперь неравенство для произвольных положительных чисел x_1, ..., x_{n+1}, предполагая, что оно справедливо для любых n ($n\geqslant 4$) положительных чисел. Выберем наименьшее из чисел x_1, ..., x_{n+1}. Поскольку они входят в неравенство симметрично, можно, не ограничивая общности, считать, что это x_{n+1}. Тогда $x_{n+1}>0$, $x_{n+1}\leqslant x_n$ и $x_{n+1}\leqslant x_1$, и поэтому

$$\frac{x_1}{x_2+x_{n+1}}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\dots+\frac{x_n}{x_{n+1}+x_{n-1}}+$$

$$+\frac{x_{n+1}}{x_1+x_n}>\frac{x_1}{x_2+x_n}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\dots+\frac{x_n}{x_1+x_{n-1}}\geqslant 2$$

(последнее неравенство выполняется по предположению индукции). Попутно получаем, что при $n>4$ равенство невозможно.

в) Числа x_1, ..., x_n удобно расставлять по окружности; тогда каждое слагаемое в левой части рассматриваемого неравенства есть одно из этих чисел, деленное на сумму двух соседних с ним. При $n=2k$ определим x_i так, как показано на рисунке 1, а при $n=2k+1$ — как на рисунке 2.

В первом случае получим сумму

$$2\left(\frac{1}{q+1}+\frac{q}{q^2+1}+\frac{q^2}{q^3+q}+\dots+\frac{q^{k-1}}{q^{k-1}+q^{k-2}}\right)=$$

$$=2\left(1+\frac{(k-2)q}{q^2+1}\right),$$

а во втором —

$$\frac{1}{2q}+2\left(\frac{q}{q^2+1}+\frac{q^2}{q^3+q}+\dots+\frac{q^k}{q^k+q^{k-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2q}+\frac{2(k-1)q}{q^2+1}-\frac{2q}{q+1}=$$

$$=2+\left(\frac{1}{2q}+\frac{2(k-1)q}{q^2+1}-\frac{2}{q+1}\right).$$

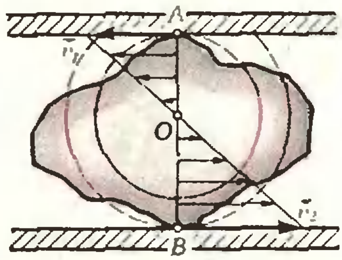
В обоих случаях при достаточно большом q значение левой части будет сколь угодно близко к 2, поэтому число 2 в неравенстве на большее заменить нельзя.

А. Егоров

◆

Ф758. *Жесткая заготовка зажата между двумя параллельными направляющими, движущимися в горизонтальном направлении со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. В некоторый момент времени точки касания заготовки с направляющими лежат на прямой, перпендикулярной векторам $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Какие точки заготовки имеют в этот момент скорости, равные по абсолютной величине v_1 и v_2?*

Скорости точек заготовки, лежащих в данный момент на отрезке AB, равномерно меняются от $\vec{v}_1$ в точке A до $\vec{v}_2$ в точке B. Следовательно, скорость точки O (см. рисунок) в данный момент равна нулю. Точка O — мгновенный центр вращения. (Поскольку заготовка объемная, точка O лежит на мгновенной оси вращения, которая перпендикулярна плоскости рисунка.)



Понятно, что скорость $|\vec{v}_1|$ в данный момент имеют точки заготовки, лежащие на окружности радиуса OA, а скорость $|\vec{v}_2|$ — точки, лежащие на окружности радиуса OB. (В объемной заготовке точки с такими скоростями лежат на цилиндрических поверхностях, радиусы которых равны соответственно $|OA|$ и $|OB|$.)

С. Кротов

◆

Ф759. *Невесомый стержень длины l с небольшим грузом массы m на конце шарнирно закреплен в точке A (рис. 1) и находится в строго вертикальном положении, касаясь при этом тела массы M. От небольшого толчка система приходит в движение. При каком соотношении между m и M стержень в момент «отрыва» от тела M будет составлять с горизонтом угол $\alpha=\pi/6$? Чему будет равна в этот момент скорость тела M? Трением пренебречь.*

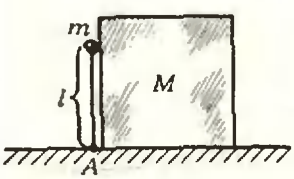


Рис. 1.

До тех пор, пока груз касается тела, скорость тела равна горизонтальной проекции скорости груза, а ускорение тела равно горизонтальной проекции ускорения груза.

Пусть $\vec{a}$ — полное ускорение груза. Тогда можно записать: $\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_ц$, где $\vec{a}_ц$ — центростремительное ускорение груза при его движении по окружности радиуса l, то есть $|\vec{a}_ц|=v^2/l$, где v — модуль скорости груза. Горизонтальная проекция ускорения груза равна (см. рис. 2)

$$a_r=a_\tau\sin\alpha-\frac{v^2}{l}\cos\alpha.$$

С таким ускорением движется тело. Уравнение движения тела —

$$N=Ma_r=Ma_\tau\sin\alpha-M\frac{v^2}{l}\cos\alpha,$$

где N — сила нормального давления со стороны груза. В момент отрыва груза $N=0$, и

$$a_\tau\sin\alpha=\frac{v^2}{l}\cos\alpha.$$

Ускорение a_τ в момент отрыва сообщается грузу только силой тяжести и (см. рис. 2)

$$a_\tau=g\cos\alpha.$$

Таким образом, скорость груза в момент отрыва равна

$$v=\sqrt{gl\sin\alpha}.$$

а скорость тела —

$$u = v\sin\alpha = \sin\alpha\sqrt{gl\sin\alpha}.$$

Согласно закону сохранения энергии, в момент времени, когда стержень составляет угол α с горизонтом,

$$mgl = mgl\sin\alpha + m\frac{v^2}{2} + M\frac{v^2\sin^2\alpha}{2}.$$

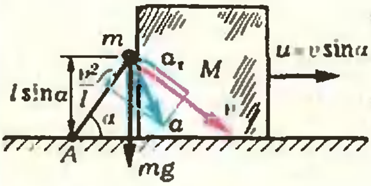


Рис. 2.

Подставив в это равенство найденное выражение для v в момент отрыва и значение $\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, найдем отношение M/m:

$$\frac{M}{m} = \frac{2 - 3\sin\alpha}{\sin^3\alpha} = 4.$$

Скорость тела при отрыве груза равна

$$u = v\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gl}{2}}.$$

К. Сергеев

◆

Ф760. *В теплоизолированный сосуд, содержащий $m_1 = 20$ г гелия, влетает со скоростью $v = 100$ м/с стальной шарик массы $m_2 = 1$ г. Найти изменение температуры в сосуде. Удары шарика о стенки сосуда и атомов о шарик считать абсолютно упругими.*

Через большое время шарик потеряет практически всю скорость (его масса во много раз больше массы атома гелия), и можно считать, что изменение внутренней энергии газа в сосуде равно начальной кинетической энергии шарика:

$$\frac{m_2v^2}{2} = \Delta U = \frac{3}{2}Nk\cdot\Delta T = \frac{3}{2}kN_A\frac{m_1}{\mu}\cdot\Delta T, \qquad (*)$$

где $N = N_A\frac{m_1}{\mu}$ — число атомов гелия в сосуде, ΔT — изменение температуры гелия. Учитывая, что $kN_A = R$, из $(*)$ находим:

$$\Delta T = \frac{m_2v^2\mu}{3m_1R} \approx 0{,}08\ \text{К}.$$

Более точное решение должно учесть повышение температуры шарика. Тогда

$$\frac{m_2v^2}{2} = cm_2\cdot\Delta T' + \frac{3}{2}\frac{m_1}{\mu}R\cdot\Delta T',$$

где $c = 0{,}5\cdot10^3$ Дж/(кг·К) — удельная теплоемкость стали. Отсюда находим $\Delta T'$:

$$\Delta T' = \frac{m_2v^2}{2\left(cm_2 + \frac{3}{2}\frac{m_1}{\mu}R\right)} \approx 0{,}08\ \text{К}.$$

Ответ получается практически тот же.

Р. Александров

◆

Ф761. *Схему собирают из батарейки, двух одинаковых амперметров и двух одинаковых вольтметров. Амперметры A_1 и A_2 показывают соответственно $I_1 = 1{,}1$ мА, $I_2 = 0{,}9$ мА; вольтметр B_2 показывает $U_2 = 0{,}25$ В. Что показывает вольтметр B_1? Чему равно напряжение батареи?*

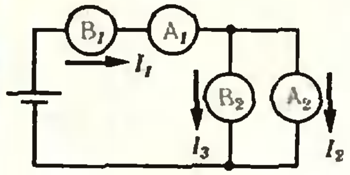
Ток I_3 через вольтметр B_2 равен разности токов, протекающих через амперметры A_1 и A_2:

$$I_3 = I_1 - I_2 = 0{,}2\ \text{мА}.$$

При этом показания вольтметра B_2 — $U_2 = 0{,}25$ В. Следовательно, сопротивления вольтметров B_2 и B_1

$$R_{B1} = R_{B2} = U_2/I_3 = 12{,}5\cdot10^2\ \text{Ом}.$$

Ток, текущий через вольтметр B_1 — $I_1 = 1{,}1$ мА; при этом вольтметр B_1 показывает



$$U_1 = I_1 R_{B1} = 1{,}375\ \text{В}.$$

Сопротивления амперметров одинаковы и равны

$$R_{A1} = R_{A2} = U_2/I_2 \approx 2{,}77 \cdot 10^2\ \text{Ом}.$$

Напряжение U_3 на амперметре A_1 равно

$$U_3 = I_1 R_{A1} \approx 0{,}305\ \text{В}.$$

Напряжение на батарее равно сумме напряжений U_1, U_2, U_3:

$$U_б = U_1 + U_2 + U_3 \approx 1{,}93\ \text{В}.$$

З. Рафаилов

◆

Ф762. *На рисунке 1 приведена вольтамперная характеристика лампы накаливания, номинальное напряжение которой $U_н = 220$ В, номинальная мощность $P_н = 100$ Вт. Лампу подключают к сети переменного тока (220 В, 50 Гц) последовательно с конденсатором емкости $C = 10$ мкФ. Определить ток в лампе и напряжение на ней. Считать, что в течение периода сетевого напряжения температура нити практически не меняется.*

Поскольку температура нити в течение периода остается неизменной, в рабочей точке лампу можно считать обычным резистором.

На рисунке 2 приведена векторная диаграмма для цепи с последовательно включенными резистором и конденсатором. Из диаграммы находим:

$$U_{мC}^2 + U_{мR}^2 = U_м^2.$$

Подставляя $U_{мC}^2 = I_м^2/\omega^2 C^2$, найдем связь между напряжением $U_{мR}$ на лампе и током $I_м$ через нее:

$$I_м = \omega C \sqrt{U_н^2 - U_{мR}^2} = 314 \cdot 10^{-5} \sqrt{48\,400 - U_{мR}^2}\ \text{(А)}.$$

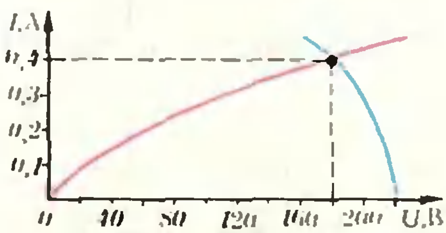


Рис. 1.

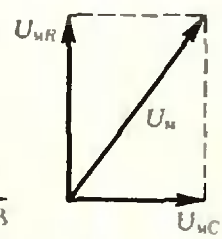


Рис. 2.

Построим график этой зависимости на том же рисунке 1, на котором задана вольтамперная характеристика лампы. Точка пересечения графиков и определяет рабочую точку: $U_л = 180$ В, $I_л \approx 0{,}4$ А.

А. Зильберман

◆

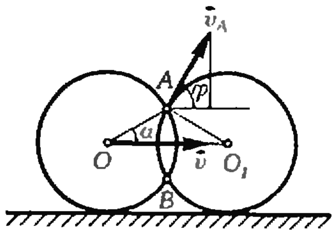
Ф763. *На горизонтальной поверхности стоит обруч радиуса R. Мимо него движется со скоростью v такой же обруч. Найти зависимость скорости верхней точки «пересечения» обручей от расстояния между их центрами. Обручи тонкие; второй обруч «проезжает» вплотную к первому.*

Поскольку обруч с центром в точке O_1 покоится, скорость v_A точки A в любой момент времени должна быть направлена по касательной к окружности с центром O_1. Отрезок AB (см. рисунок) в любой момент времени делит расстояние $d = OO_1$ между центрами обручей пополам, поэтому горизонтальная проекция скорости $\vec{v}_A$ все время равна $v/2$.

Следовательно, скорость v_A точки A составляет с горизонтом угол $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ (см. рисунок) и

$$v_A = \frac{v}{2\cos\varphi} = \frac{v}{2\sin\alpha}.$$

Поскольку $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\dfrac{d}{2R}\right)^2}$,



$$v_A = \frac{v}{2\sqrt{1-\left(\frac{d}{2R}\right)^2}}.$$

С. Кротов

◆

Ф764. *Ударная волна представляет собой область повышенного давления, распространяющуюся с большой скоростью v в направлении оси X (рис. 1); в момент прихода волны давление резко повышается от значения p_0 до $2p_0$. На пути распространения волны стоит клин, размеры клина указаны на рисунке 2, масса клина равна m. Какую скорость приобретет клин сразу после прохождения через него фронта ударной волны? Считать, что приобретаемая клином скорость много меньше скорости распространения волны; трение пренебрежимо мало.*

Выберем начало отсчета по оси X так, как показано на рисунке 2. Тогда сила, действующая на клин, зависит лишь от координаты x фронта ударной волны. Горизонтальная проекция этой силы равна

$$F_x = p_0 cx \operatorname{tg} \alpha = \frac{p_0 cxa}{b} = \frac{p_0 cvta}{b},$$

где $x = vt$ — координата фронта волны к моменту времени t от начала прохождения волны через клин. Ускорение, сообщаемое клину в данный момент времени, равно

$$a_t = \frac{F_X}{m} = \frac{p_0 ca}{bm} vt.$$

В тот момент времени t_0, когда фронт волны дойдет до дальней грани клина, то есть координата фронта будет равна $b = vt_0$, ускорение клина будет

$$a_{t_0} = \frac{p_0 ca}{m}.$$

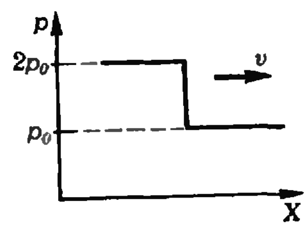


Рис. 1.

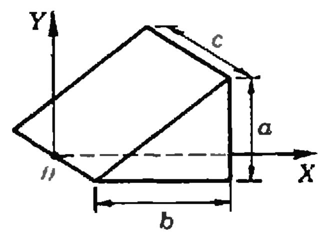


Рис. 2.

Поскольку ускорение клина линейно зависит от времени, для вычисления скорости u клина к моменту времени t_0 воспользуемся средним значением ускорения $a_{\text{ср}} = \frac{p_0 ca}{2m}$:

$$u = a_{\text{ср}} t_0 = \frac{p_0 abc}{2mv}.$$

Когда весь клин окажется в области повышенного давления, результирующая сила, действующая на клин, будет равна нулю.

Видно, что условие $u \ll v$ означает, что

$$p_0 \ll 2mv^2/abc.$$

А. Буздин

◆

Ф765. *В настоящее время мощность всех источников энергии на Земле, используемых человечеством, составляет $\Delta P = 10^{13}$ Вт, а мощность солнечной энергии, поступающей на Землю, — $P_0 = 10^{17}$ Вт. К какому перегреву ΔT по-*

Предположим, что мощность P, излучаемая нагретым телом, связана с абсолютной температурой T степенной зависимостью $P = \sigma T^n$, где σ — некоторый коэффициент пропорциональности. Тогда для двух значений температур излучающего тела T_1 и T_2 получим:

$$P_1 = \sigma T_1^n, \ P_2 = \sigma T_2^n, \quad \text{и} \quad \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^n.$$

верхности Земли приводят земные источники энергии? Какова максимально допустимая величина ΔP_{max}, если предельный перегрев из экологических соображений не должен превышать величины $\Delta T_{max}=0{,}1$ К? Известно, что энергия, излучаемая в единицу времени нагретым телом, увеличивается в 16 раз при увеличении абсолютной температуры тела в 2 раза.

Отсюда легко получить, используя данные задачи, что $n=4$.

Итак, $P=\sigma T^4$. Теперь можно записать:

$$P_0+\Delta P=\sigma(T_0+\Delta T)^4\approx\sigma T_0^4\left(1+4\frac{\Delta T}{T_0}+\ldots\right).$$

Поскольку $\Delta T/T_0\ll 1$, в последнем выражении можно отбросить члены второго и более высоких порядков. Тогда получим:

$$\Delta P=4P_0\frac{\Delta T}{T_0}.$$

Отсюда находим:

$$\Delta P=\frac{\Delta P}{4P_0}T_0\approx 10^{-2}\ \text{К},$$

$$\Delta P_{max}=4P_0\frac{\Delta T_{max}}{T_0}\approx 10^{14}\ \text{Вт}.$$

Таким образом, мощность всех источников энергии на Земле, используемых человечеством, может быть увеличена не более чем в 10 раз. (Это, разумеется, не относится к источникам, использующим солнечную энергию.)

С. Козел

◆

Ф766. *Для лампы-вспышки применили нелинейный конденсатор (он заполнен диэлектриком, у которого диэлектрическая проницаемость зависит от напряженности поля). График зависимости напряжения U от заряда Q конденсатора приведен на рисунке 1. Конденсатор заряжают от батареи с $U_0=300$ В через резистор с сопротивлением $R=10$ кОм. Найти максимальную энергию вспышки. Оценить максимальное число вспышек за 1 минуту. Считать, что при вспышке конденсатор полностью разряжается. Минимальное начальное напряжение вспышки $U_1=250$ В.*

Максимальная энергия вспышки численно равна площади под графиком кривой $U(Q)$, ограниченной значением $U=U_0=300$ В (при этом $Q\approx 0{,}3$ Кл; см. рис. 1). Чтобы посчитать эту площадь, разделим кривую $U(Q)$ на участки, на которых зависимость $U(Q)$ можно приближенно считать линейной. Под каждым таким участком площадь численно равна $U_{i\,ср}\cdot\Delta Q_i$. Таким образом, максимальная энергия вспышки равна (см. рис. 1)

$$W\approx\left(\frac{140}{2}\cdot 0{,}05+\frac{140+200}{2}\cdot 0{,}075+\right.$$
$$\left.+\frac{200+300}{2}\cdot 0{,}175\right)\text{Дж}=60\ \text{Дж}.$$

Удобный способ нахождения времени заряда конденсатора от 0 до 250 В подсказывает формула $I\cdot\Delta t=\Delta Q$, откуда $\Delta t=\Delta Q/I$ и

$$t_{общ}=\sum\frac{1}{I}\cdot\Delta Q.$$

Нарисуем график зависимости $1/I$ от Q (рис. 2). Ток при заданном значении Q находим по графику на рисунке 1:

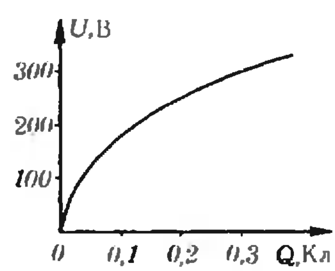


Рис. 1.

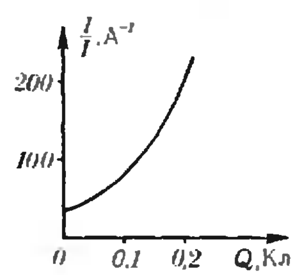


Рис. 2.

$I=\dfrac{U_0-U}{R}$. Площадь под графиком кривой, ограниченной значениями $I=200$ А, $Q=0{,}2$ Кл, численно равна времени заряда конденсатора

$$t_{общ}\approx\left(\frac{33+100}{2}\cdot 0{,}125+\frac{100+200}{2}\cdot 0{,}075\right)\text{с}\approx 20\ \text{с}.$$

Таким образом, вспышки можно производить 3 раза в минуту.

А. Зильберман

Ф767. *В одном из проектов получения электроэнергии предлагалось использовать морские течения и магнитное поле Земли. Проект заключается в следующем.*

В море погружают две горизонтальные металлические пластины, расположенные одна над другой на расстоянии $l=100$ м; площадь каждой пластины $S=1$ км^2. Морская вода, удельное сопротивление которой равно $\varrho=0{,}25$ Ом · м, протекает между пластинами с запада на восток со скоростью $v=1$ м/с. Магнитное поле Земли в данном месте однородно, направлено с юга на север; индукция поля равна $B=10^{-4}$ Тл. Определить максимальную электрическую мощность, которая может выделиться на нагрузке, подсоединенной к пластинам.

Морская вода обладает заметной ионной проводимостью, так что при движении заряженных ионов в магнитном поле Земли они отклоняются силой Лоренца к одной из горизонтальных пластин. В результате на этой пластине возникает нескомпенсированный заряд, и между пластинами появляется электрическое поле. Это поле действует на ионы с силой, направленной противоположно силе Лоренца. Такое накопление заряда на одной из пластин будет происходить до тех пор, пока электрическое поле этих зарядов не уравновесит действие силы Лоренца. Отметим, что для возникновения такого равновесия достаточно отклонения к одной из пластин весьма малой доли ионов из их общего числа, протекающих между пластинами.

Определим напряжение $\mathcal{E}$, возникающее между горизонтальными пластинами в отсутствии между ними тока, то есть ЭДС образовавшегося «электрического генератора». Если q — заряд ионов, то в условиях равновесия

$$qvB=q\,\mathcal{E}/L \Rightarrow \mathcal{E}=vBL.$$

Если соединить пластины с внешней нагрузкой R, то через нее потечет ток I; при этом сопротивление морской воды между пластинами, равное $\varrho L/S$, будет играть роль внутреннего сопротивления образовавшегося электрического генератора.

Определим мощность, выделяющуюся в нагрузке:

$$P=I^2R=\frac{\mathcal{E}^2R}{(\varrho L/S+R)^2}.$$

Для определения максимума мощности воспользуемся следующим математическим фактом: для любого $x>0$ выполняются неравенства

$$x+1/x\geqslant 2,\quad (x+1/x)^2\geqslant 4.$$

В формуле для мощности вынесем в знаменателе множитель $\varrho LR/S$ за скобки:

$$P=\frac{\mathcal{E}^2R}{\varrho LR/S(\varrho L/SR+RS/L\varrho)^2}.$$

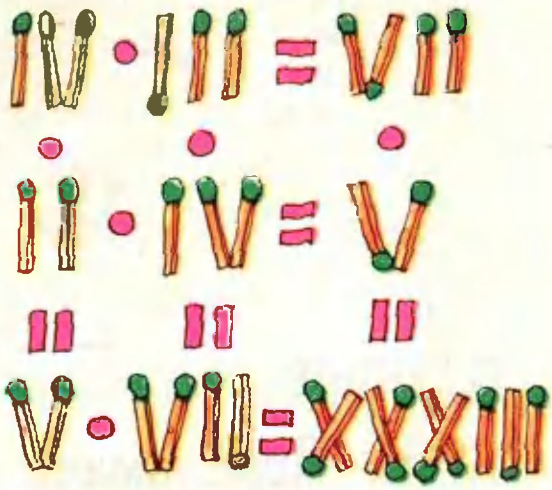
В последней формуле выражение в скобках в знаменателе больше или равно 4. Поэтому для максимальной мощности имеем:

$$P_{\max}=\mathcal{E}^2S/4\varrho L=\frac{v^2B^2LS}{4\varrho}=1\ \text{Вт}.$$

(Заметим, что эта формула соответствует случаю равенства внешней нагрузки внутреннему сопротивлению генератора.)

А. Шеронов

КВАНТ для младших школьников



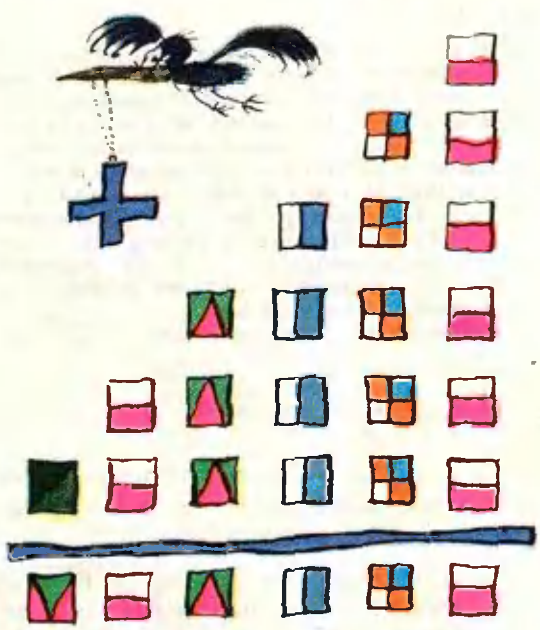
Задачи

1. В каждом горизонтальном ряду переложите по одной спичке так, чтобы все шесть равенств оказались верными.

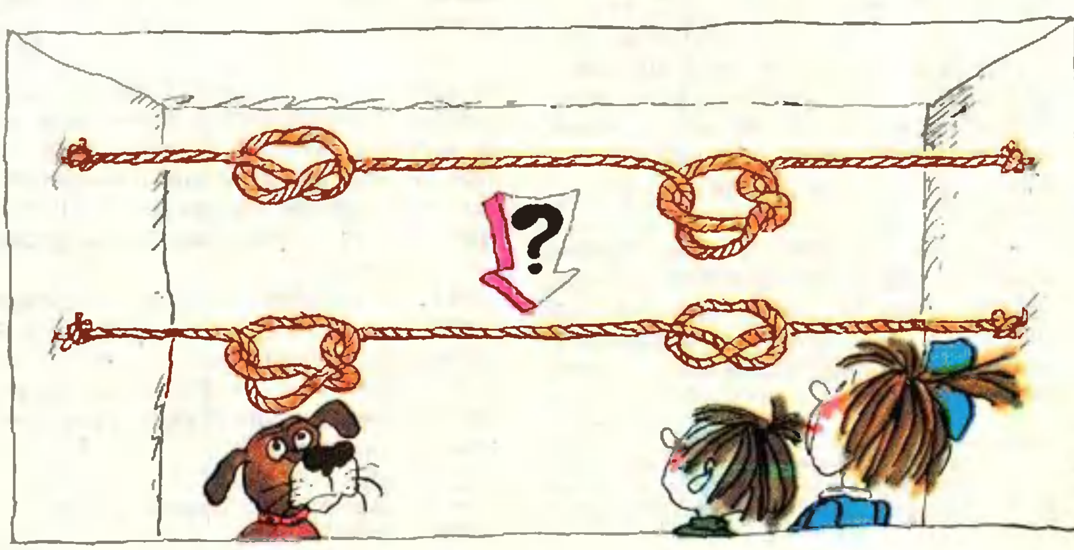
2. На растяжимой веревке, привязанной к двум противоположным стенкам комнаты, завязаны два узла. Можно ли, не отвязывая и не разрывая веревки, поменять узлы местами?

3. Восстановите пример на сложение (разным квадратным фигуркам соответствуют разные цифры, одинаковым — одинаковые).

4. Витя сказал своему другу Коле: «Я придумал пример на деление, в котором делимое, делитель, частное и остаток оканчиваются соответственно на 1, 3, 5 и 7». Подумав, Коля ответил: «Что-то ты путаешь». Прав ли Коля?



Эти задачи нам предложили
Н. Антонович, А. Лексис, Д. Плахта, С. Савастюк



Из книг Я. И. Перельмана

В этом году исполнилось сто лет со дня рождения известного популяризатора физики и математики, механики и астрономии Якова Исидоровича Перельмана. Имя этого талантливого человека широко известно и в нашей стране, и за рубежом, оно знакомо и маститым ученым, и юным любителям науки.

Я. И. Перельман — автор более пятидесяти книг и тысячи газетных и журнальных статей. Его книги открывают и будут открывать новым поколениям читателей необычайный и замечательный мир науки.

Вот несколько отрывков из них.

Как велик миллион

(из книги «Вечера занимательной науки», написанной в соавторстве с В. И. Прянишниковым)

Каждый день читаем мы в газетах и книгах про миллионы рублей, миллионы тонн или километров. Мы знаем, что миллион — это тысяча тысяч, и все же подлинной численности миллиона мы себе не представляем. Звезд на небе видно простым глазом тоже очень много; какое же множество больше: число «миллион» или число звезд на куполе ночного неба?

Ученые пересчитали все звезды, видимые на небе простым глазом, и оказалось, что их гораздо меньше миллиона: $3^1/_2$ тысячи; между тем, в миллионе 1000 тысяч. Значит, звезд на небе мы видим (без трубы) примерно в 300 раз меньше миллиона.

Миллион гораздо больше, чем мы склонны себе представлять. Сейчас вы в этом снова убедитесь. Вообразите себе пшеничное зерно, длина которого в миллион раз больше обыкновенного. Какой величины оно вам рисуется? С большой пароход? С длинный товарный поезд? Нет, оно было бы во много раз больше самого длинного поезда, потому что имело бы в длину... десять километров.

Еще вопрос: какой путь прошли бы вы, сделав миллион шагов? Оказывается — длиннее, чем от Москвы до Ленинграда... У кого есть досуг и охота, тот может проверить эти расчеты. Здесь рассказано о них для того, чтобы, читая и говоря о миллионах нашей социалистической стройки, о миллионах гектаров посева, о миллионах километров, отделяющих нас от небесных светил, вы лучше понимали, какой смысл скрывается в слове «миллион».

О жизни и творческой деятельности Я. И. Перельмана рассказывается в статье В. Френкеля «Рыцарь научно-популярной книги».

По страницам Джонатана Свифта

(из «Занимательной геометрии»)

Автор «Путешествия Гулливера» с большой осмотрительностью избежал опасности запутаться в геометрических отношениях. Читатель помнит, без сомнения, что в стране лилипутов нашему футу соответствовал дюйм*), а в стране великанов, наоборот, дюйму — фут. Другими словами, у лилипутов все вещи, все произведения природы в 12 раз меньше нормальных, у великанов — во столько же раз больше. Эти на первый взгляд простые отношения, однако, сильно усложнялись, когда приходилось решать вопросы вроде следующих:

1) Во сколько раз Гулливер съедал за обедом больше, чем лилипут?

2) Во сколько раз Гулливеру требовалось больше сукна на костюм, нежели лилипутам?

*) 1 дюйм = 0,0254 м, 1 фут = 12 дюймам = 0,3048 м. (*Прим. ред.*)

3) Сколько весило яблоко страны великанов?

Автор «Путешествия» справлялся с этими задачами в большинстве случаев вполне успешно. Он правильно рассчитал, что раз лилипут ростом меньше Гулливера в 12 раз, то объем его тела меньше в $12\times 12\times 12$, то есть в 1728 раз; следовательно, для насыщения Гулливера нужно в 1728 раз больше пищи, чем для лилипута. И мы читаем в «Путешествии» такое описание обеда Гулливера:

«Триста поваров готовили для меня кушанье. Вокруг моего дома были поставлены шалаши, где происходила стряпня и жили повара со своими семьями. Когда наступал час обеда, я брал в руки 20 человек прислуги и ставил их на стол, человек 100 прислуживало с пола: одни подавали кушанье, остальные приносили бочки с вином и другими напитками на шестах, перекинутых с плеча на плечо. Стоявшие наверху, по мере надобности, поднимали все это на стол при помощи веревок и блоков...».

Правильно рассчитал Свифт и количество материала на костюм Гулливера. Поверхность его тела больше, чем у лилипутов, в $12\times\times 12=144$ раза; во столько же раз нужно ему больше материала, портных и т. п. Все это учтено Свифтом, рассказывающим от имени Гулливера, что к нему «было прикомандировано 300 портных-лилипутов с наказом сшить полную пару платья по местным образцам». (Спешность работы потребовала двойного количества портных.)

Надобность производить подобные расчеты возникала у Свифта чуть не на каждой странице. И, вообще говоря, он выполнял их правильно. Если у Пушкина в «Евгении Онегине», как утверждает поэт, «время расчислено по календарю», то в «Путешествии» Свифта все размеры согласованы с правилами геометрии. Лишь изредка надлежащий масштаб не выдерживался, особенно при описании страны великанов. Здесь иногда встречаются ошибки.

«Один раз,— рассказывает Гулливер,— с нами отправился в сад придворный карлик. Улучив удобный

момент, когда я, прохаживаясь, очутился под одним из деревьев, он ухватился за ветку и встряхнул ее над моей головой. Град яблок, величиной каждое с хороший бочонок, шумно посыпался на землю; одно ударило меня в спину и сбило с ног...»

Гулливер благополучно поднялся на ноги после этого удара. Однако легко рассчитать, что удар от падения подобного яблока должен был быть поистине сокрушающим: ведь яблоко в 1728 раз тяжелее нашего, то есть весом*) в 80 кг, обрушилось с 12-кратной высоты. Энергия удара должна была превосходить в 20 000 раз энергию падения обыкновенного яблока и могла бы сравниться разве

*) Здесь и дальше под «весом» тела надо понимать его массу (*Прим. ред.*)

лишь с энергией артиллерийского снаряда...

Наибольшую ошибку допустил Свифт в расчете мускульной силы великанов. Мы уже видели в первой главе*), что мощь крупных животных не пропорциональна их размерам. Если применить приведенные там соображения к великанам Свифта, то окажется, что, хотя мускульная сила их была в 144 раза больше силы Гулливера, вес их тела был больше в 1728 раз**). И если Гулливер в силах был поднять не только вес своего собственного тела, но и еще примерно такой же груз, то великаны не в состоянии были бы преодолеть даже груза своего огромного тела. Они должны были бы неподвижно лежать на одном месте, бессильные сделать сколько-нибудь значительное движение. Их могущество, так картинно описанное у Свифта, могло явиться лишь в результате неправильного подсчета.

Несколько занимательных опытов

(из книги «Физика на каждом шагу»)

Водолазный колокол. Для этого опыта годится обыкновенный таз, но если вы сможете получить глубокую и широкую банку, то опыт проделать удобнее. Вам понадобится еще высокий стакан. Это и будет ваш «водолазный колокол», а таз с водой представит уменьшенное подобие моря или озера.

Едва ли есть опыт проще этого. Вы держите стакан вверх дном, погружаете его на дно таза, продолжая придерживать рукой (чтобы вода его не вытолкнула). При этом легко заметить, что вода внутрь стакана почти не проникает: воздух не допускает ее. Это становится гораздо нагляднее, когда под нашим «колоколом» находится какой-либо легко намокающий предмет, например кусочек сахару. Положите на воду пробковый кружок, на него — сахар и прикройте сверху стаканом. Смело опускайте теперь стакан в воду. Сахар очутится ниже уровня воды, но останется сухим, потому что вода под стакан не проникнет.

Такой же опыт можно проделать и со стеклянной воронкой, если, повернув ее широким концом вниз, плотно заткнуть пальцем ее отверстие и тогда погрузить в воду. Вода под воронку не проникает, но стоит от-

*) Имеется в виду книга «Занимательная геометрия». (*Прим. ред.*)

**) Так как сила мускулов зависит от их толщины, то есть поперечного сечения, то при увеличении размеров животного сила растет пропорционально квадрату, а вес — кубу увеличения. (*Прим. ред.*) «Законом неодинакового нарастания объема и веса животного, а вместе с тем и мускульной силы, объясняется, почему насекомое, как мы это наблюдаем на муравьях, хищных осах и т. д., может тащить тяжести, в 30, в 40 раз превосходящие вес собственного их тела, тогда как человек в состоянии тащить нормально — мы исключаем гимнастов и носильщиков тяжестей — лишь около 9/10, а лошадь, на которую мы взираем как на прекрасную живую рабочую машину, и того меньше, а именно, лишь около 7/10 своего веса». (Из статьи «Шестиногие богатыри».)

нять палец от отверстия и тем дать воздуху выход, чтобы вода быстро поднялась в воронке до уровня окружающей воды.

Этот опыт должен наглядно объяснить вам, как люди могут находиться и работать под водой в водолазном колоколе или внутри тех широких труб, которые называются кессонами. Вода не проникает внутрь водолазного колокола или кессона по той же причине, по какой не втекает она под стакан в нашем опыте.

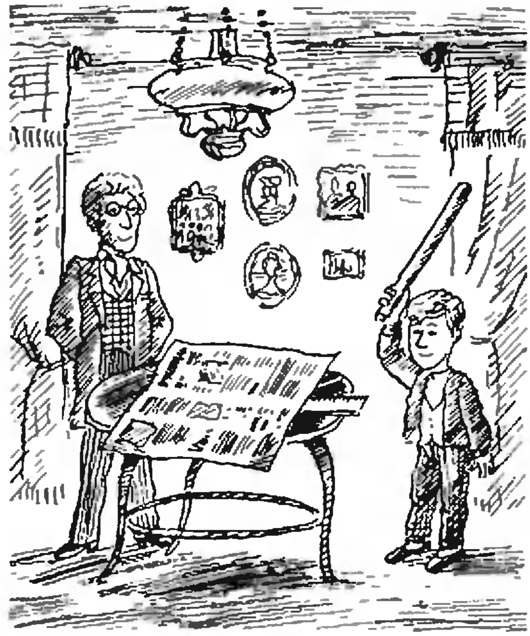
Тяжелая газета. — Возьми-ка газету в руки,— сказал мне как-то старший брат в те годы моей юности, когда физика была мне еще совершенно незнакома.— Газета очень легка, не правда ли? И ты думаешь, конечно, что сможешь всегда поднять ее хоть одним пальцем. Но вот сейчас ты увидишь, что та же самая газета может сделаться очень и очень тяжелой. Подай мне вон ту чертежную линейку.

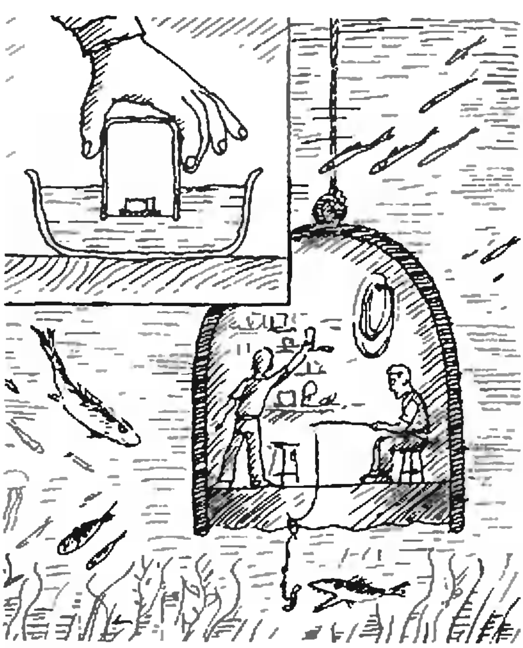
— Она изрублена, никуда не годится.

— Тем лучше: не жалко, если сломается.

Брат положил линейку на стол так, что часть ее высовывалась за край.

— Тронь за выступающий конец. Легко наклонить, правда? Ну, а попробуй наклонить ее, когда я накрою другую половину газетой.





Он разостлал газету на столе, аккуратно расправив ее складки и покрыв ею линейку.

— Бери палку и сильно ударь по выступающей части линейки. Бей со всего размаху.

— Так ударю, что линейка в потолок полетит! — воскликнул я, размахиваясь.

— Главное — не жалей силы...

* * *

На этом месте мы прервем рассказ. Проделайте сами этот опыт и постарайтесь объяснить результат, обосновав его численными расчетами.

Публикацию подготовила
И. Кириллова

Н. Сатьянов

Формулы и графики

Арифметические знаки — это записанные геометрические фигуры, а геометрические фигуры — это нарисованные формулы.

(Д. Гильберт)

Как та или иная особенность формулы, задающей функцию, отражается на графике этой функции? Умение правильно ответить на этот вопрос — в разных ситуациях — бывает полезным при построении графиков, в частности таких, которые попадаются на вступительных экзаменах. Мы не останавливаемся здесь на особенностях графиков функций, связанных с их экстремумами (об этом подробно сказано в учебном пособии «Алгебра и начала анализа 9—10», п. 27), а обсуждаем в основном смену знаков, вертикальные и горизонтальные асимптоты. В конце статьи мы поместили небольшой тест (задание с выбором ответов), позволяющий проконтролировать усвоение указанного материала.

Нули и изменение знака

Если функция $y=f(x)$ обращается в нуль в некоторой точке x_0, это еще не означает, что график функции f обязательно пересекает ось Ox под ненулевым углом. Есть и другие возможности — например, касание (со сменой знака или без). Как отличить касание от простой смены знака?

График функции*)

$$y=(x-1)^3(x-2)^2 \qquad (1)$$

изображен на рисунке 1. В формулу (1) множитель $x-1$ входит в нечетной степени — поэтому при переходе через $x=1$ он меняет знак. Множитель $x-2$ при переходе через $x=1$ знака, конечно, не меняет. Следовательно, при переходе через $x=1$ их произведение меняет знак — график пересекает ось абсцисс. Множитель $x-2$ входит в формулу (1) в четной

*) На этом и следующих рисунках масштаб по оси Oy отличается от масштаба по Ox.

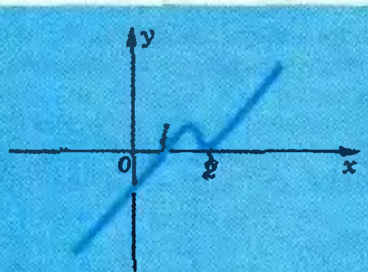


Рис. 1.

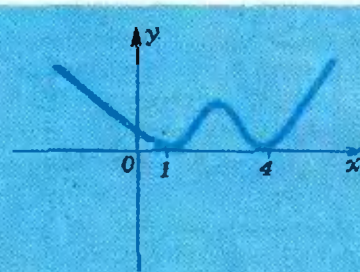


Рис. 2.

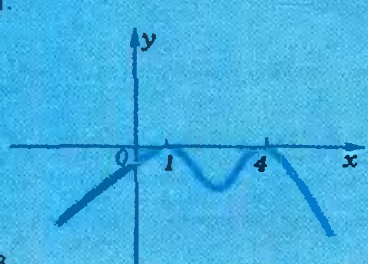


Рис. 3.

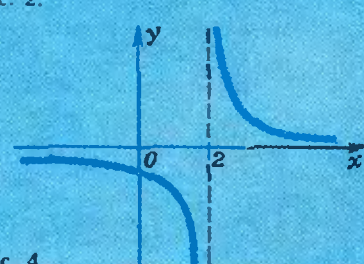


Рис. 4.

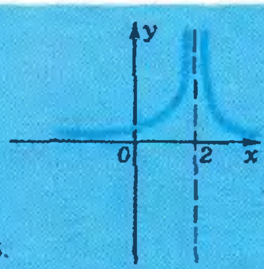


Рис. 5.

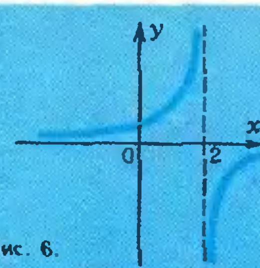


Рис. 6.

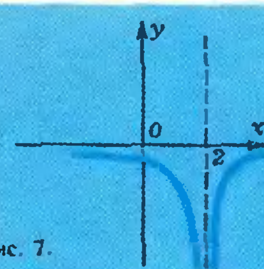


Рис. 7.

степени — поэтому при переходе через $x=2$ он знака не меняет. Множитель $x-1$ при переходе через $x=2$ тоже, конечно, не меняет знака. Следовательно, их произведение при переходе через $x=2$ знака не меняет, и график касается оси x, не пересекая ее, в точке $x=2$.

Графики функций $y=(x-1)^2\times\times(x-4)^4$ и $y=-(x-1)^2(x-4)^4$ изображены соответственно на рисунках 2 и 3.

Таким образом, в выражениях вида $f(x)=\varphi(x)(x-a)^k$ $(k\in N)$, где $\varphi(a)\neq 0$ и φ непрерывна в точке $x=a$, все дело в четности k: смена знака в точке $x=a$ происходит тогда и только тогда, когда k нечетно. В случае, когда φ дифференцируема в точке $x=a$, график f касается оси Ox в точке a, если $k\geqslant 2$ (подумайте, почему), и остается при этом по одну сторону от оси Ox тогда и только тогда, когда k четно.

Вертикальные асимптоты

График функции $y=\frac{1}{x-2}$ показан на рисунке 4. Когда x стремится к 2, модуль $\left|\frac{1}{x-2}\right|$ неограниченно увеличивается; в этом случае прямая $x=2$ называется *вертикальной асимптотой*. Мы запишем это так:

$$\lim_{x\to 2}\left|\frac{1}{x-2}\right|=+\infty.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться этой удобной записью, хотя ее нет в школьном учебнике. На экзамене, конечно, немного опасно пользоваться внепрограммным материалом; поэтому лучше сказать словами, что при $x\to 2$ функция $1/|x-2|$ неограниченно возрастает. Для любознательных сообщаем соответствующее определение в общем случае: функция $f(x)$ *стремится к* $+\infty$ *при* $x\to a$ (запись: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$), если для любого числа A_0 существует такое x_0, что $f(x)>A_0$, как только x ближе к a, чем x_0, точнее, как только $0<|x-a|<|x_0-a|$.

Поведение функции $y=\frac{1}{x-2}$ в окрестности точки $x=2$ можно описать и детальнее — при x, стремящемся к 2 справа («Алгебра и начала анализа 9—10», п. 11), $\frac{1}{x-2}$ стремится к $+\infty$:

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}=+\infty;$$

при x, стремящемся к 2 слева, $\frac{1}{x-2}$ стремится к $-\infty$:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}=-\infty.$$

Прямая $x=2$ является также (вертикальной) асимптотой графика функции $y=\frac{1}{(x-2)^2}$ (рис. 5):

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{1}{(x-2)^2}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty.$$

В этом случае при x, стремящемся к 2 справа, и при x, стремящемся к 2 слева, $\frac{1}{(x-2)^2}$ стремится к $+\infty$:

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty.$$

Прямая $x=2$ является также асимптотой графиков функций $y=-\frac{1}{x-2}$ (рис. 6) и $y=-\frac{1}{(x-2)^2}$ (рис. 7).

Любая прямая вида $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k\in Z)$ является асимптотой графика функции $y=\operatorname{tg} x$ (рис. 8).

Прямая $x=0$ является асимптотой графика функции $y=\log_a x$ при x,

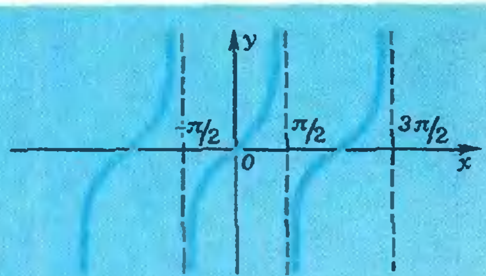


Рис. 8.

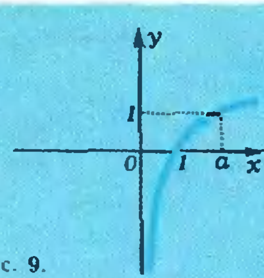


Рис. 9.

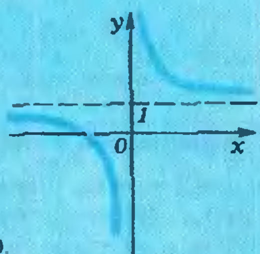


Рис. 10.

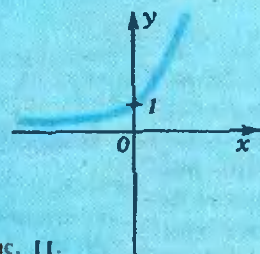


Рис. 11.

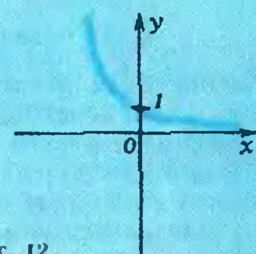


Рис. 12.

стремящемся к 0 справа (на рисунке 9 $a>1$).

Горизонтальные асимптоты

Когда x неограниченно увеличивается (математики говорят «стремится к $+\infty$»), график функции $y=\frac{1+x}{x}$ неограниченно приближается к прямой $y=1$ (рис. 10); в этом случае прямая $y=1$ называется *горизонтальной асимптотой*. Когда x неограниченно убывает, то есть неограниченно увеличивается по модулю, будучи отрицательным (математики говорят «стремится к $-\infty$»), график функции $y=\frac{1+x}{x}$ тоже неограниченно приближается к прямой $y=1$ (см. рис. 10); прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой также при неограниченно убывающем x. Все это можно коротко записать в виде

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x}{x}=1.$$

Мы также будем пользоваться этой удобной записью, хотя ее нет в учебнике. Сообщаем определение в общем случае: функция $f(x)$ стремится к A при x, стремящемся к $+\infty$ (в формульной записи $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$), если для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое X, что

$$x>X \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

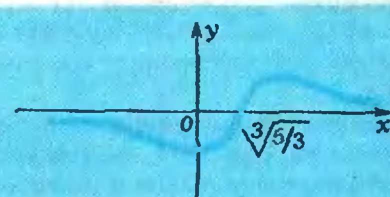


Рис. 13.

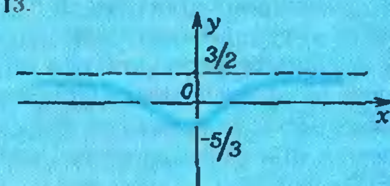


Рис. 14.

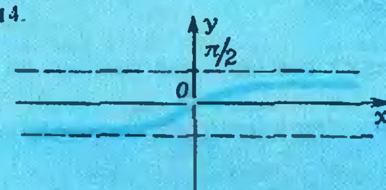


Рис. 15.

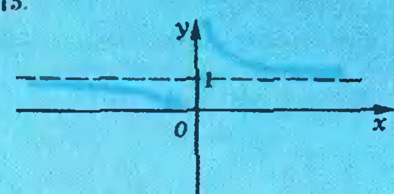


Рис. 16.

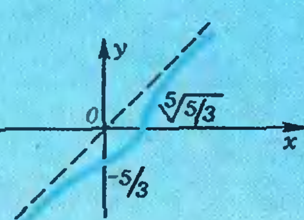


Рис. 17.

При $a>1$ ось абсцисс является асимптотой графика функции $y=a^x$, когда $x\to-\infty$ (рис. 11), но не является его асимптотой, когда $x\to+\infty$ (если $x\to+\infty$, этот график не имеет асимптоты — он не «прижимается» ни к какой прямой).

При $0<a<1$ — наоборот: ось абсцисс является асимптотой графика функции $y=a^x$ при $x\to+\infty$ (рис. 12) и не является его асимптотой при $x\to-\infty$.

Ось абсцисс является асимптотой графика функции $y=\frac{3x^3-5}{2x^4+3}$ как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$ (рис. 13):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-5}{2x^4+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{5}{x^3}}{2x+\frac{3}{x^3}}=0$$

(аналогично для $x\to-\infty$).

Для графика функции $y=\frac{3x^4-5}{2x^4+3}$ — как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$ — асимптотой является прямая $y=\frac{3}{2}$ (рис. 14):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4-5}{2x^4+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{5}{x^4}}{2+\frac{3}{x^4}}=\frac{3}{2}$$

(аналогично для $x\to-\infty$)

График функции $y=\frac{3x^5-5}{2x^4+3}$ не имеет горизонтальной асимптоты ни при $x\to+\infty$, ни при $x\to-\infty$ (впрочем, к нему мы еще вернемся).

График функции $y=\operatorname{arctg} x$ при $x\to+\infty$ имеет асимптотой прямую $y=\frac{\pi}{2}$, при $x\to-\infty$ — прямую $y=-\frac{\pi}{2}$ (рис. 15).

График функции $y=2^{\frac{1}{x}}$ нарисован на рисунке 16. Прямая $x=0$ является асимптотой (вертикальной) этого графика при x, стремящемся к 0 справа ($x\to0+0$), и не является его асимптотой при $x\to0-0$. Прямая $y=1$ является асимптотой (горизонтальной) этого графика как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$.

Бывают еще и *наклонные асимптоты*: при $x\to+\infty$ график функции $y=\frac{3x^5-5}{2x^4+3}$ «прижимается» к прямой $y=\frac{3}{2}x$ (рис. 17), при $x\to-\infty$ он «прижимается» к той же прямой (попробуйте дать определение!). График функции $y=\frac{3x^6-5}{3x^4+3}$ не имеет и наклонных асимптот.

В заключение обещанное задание для самоконтроля.

1. Для каждого из графиков, изображенных на рисунке 18, сконструируйте формулу, задающую график, обладающий теми же основными особенностями.

2. Для каждого из графиков А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И подберите в списке формул 1—25 ту, которая задает этот график (рис. 19, с. 50).

1) $y=(x-2)(x+1)^2$; 2) $y=x(x^2-1)(x-1)$; 3) $y=(x-2)^2(x+1)$; 4) $y=(x+1)^2(2-x)$; 5) $y=x(x^2-1)(x+1)$; 6) $y=(x-2)^2(x+1)^2$; 7) $y=x^3(x^2-1)(x+1)$; 8) $y=(x^2-1)^3$; 9) $y=(x+1)^2(2-x)^3$; 10) $y=(x^2-1)^2$; 11) $y=-x2^x$; 12) $y=-x^32^{-x}$; 13) $y=-x2^{-x}$; 14) $y=\frac{x^2-x}{x^2-4}$; 15) $y=\frac{1+x+x^2}{1+x^2}$; 16) $y=\frac{1-x+x^2}{1+x^2}$; 17) $y=\frac{1+x+2x^2}{1+x^2}$; 18) $y=\frac{2+x^2}{1+x^2}$; 19) $y=\frac{2+x^4}{1+x^2}$; 20) $y=\frac{2+x^2}{1+x^4}$; 21) $y=\frac{1-x^2}{x^2-4}$; 22) $y=\frac{x^4-1}{x^2-4}$;

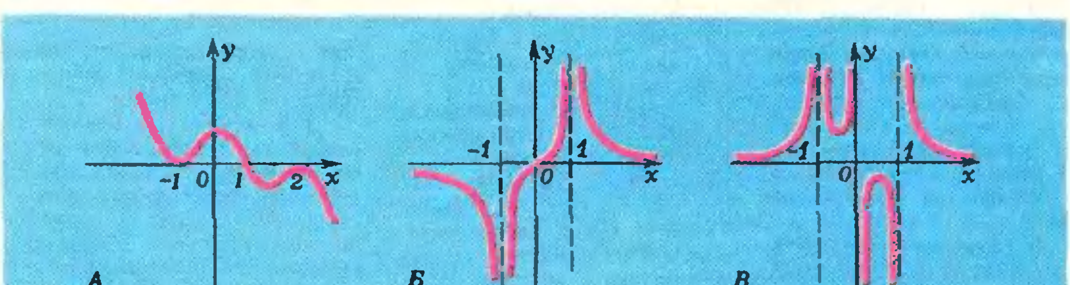


Рис. 18.

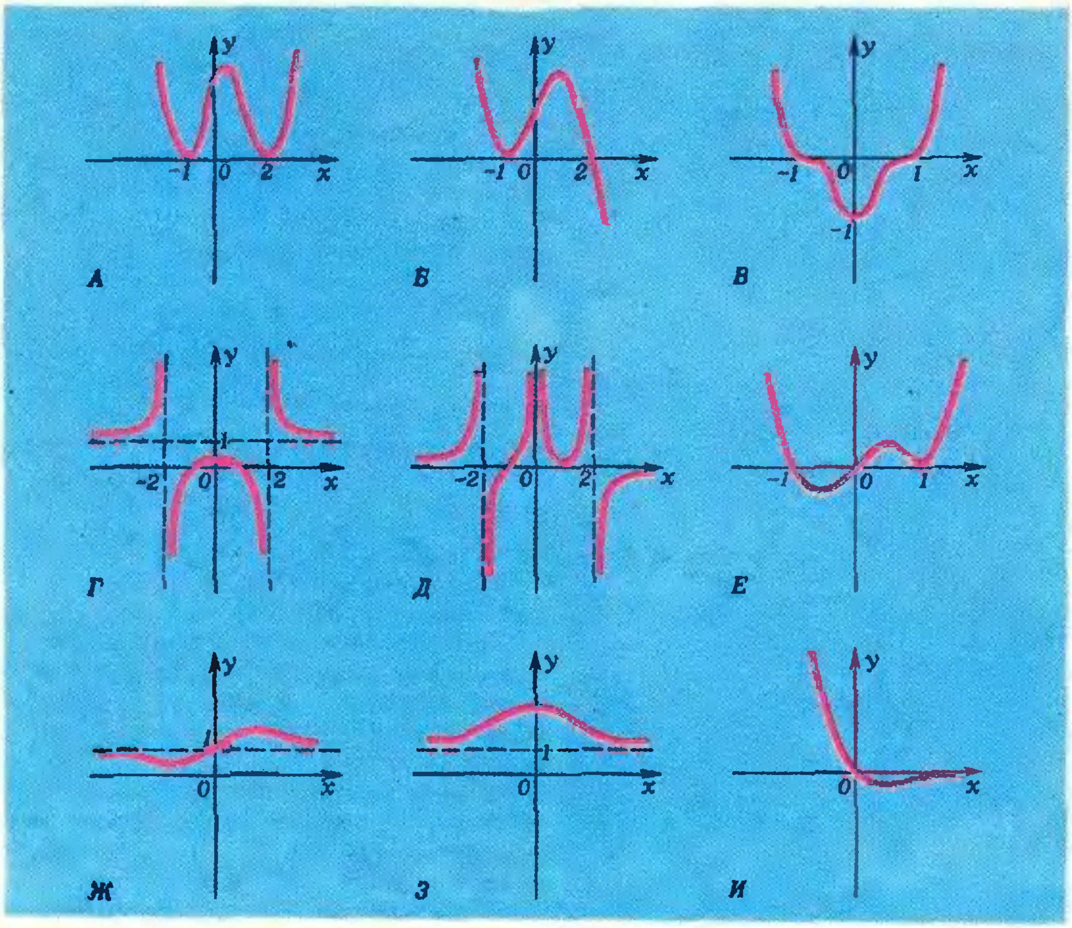


Рис. 19.

23) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$; 24) $y=\dfrac{x^2-1}{x(4-x^2)}$; 25) $y=\dfrac{(x^2-1)(x-1)}{x(4-x^2)}$.

Новое совершенное число

В редакцию «Кванта» пришло письмо нашего читателя Л. Ковгана (г. Фролово Волгоградской обл.). Он обращает внимание на появившееся в журнале «Знание — сила» сообщение о получении нового простого числа и отмечает, что одновременно фактически указано и новое совершенное число. «Я хотел бы, — заканчивает свое письмо Л. Ковган, — чтобы журнал «Квант» опубликовал короткую информацию об этом».

Выполняем просьбу читателя.

В «Кванте» (1971, № 8, с. 1; 1972, № 4, с. 39; 1973, № 10, с. 71) уже рассказывалось о любопытной истории изучения совершенных чисел. *Совершенным* называют натуральное число, равное сумме всех его собственных делителей (то есть делителей, отличных от самого числа). Как доказал еще Евклид, если число 2^k-1 — простое, то число $2^{k-1}(2^k-1)$ является совершенным. Вот несколько первых совершенных чисел:

6, 28, 496, 8 128, 33 550 336, ...

До недавнего времени было найдено (главным образом, благодаря ЭВМ) только 24 совершенных числа.

А теперь воспроизведем информацию, опубликованную в журнале «Знание — сила» (1980, № 6, с. 10):

«Компьютер по имени «Крэй-1» сумел найти самое большое из известных доселе математикам простое число [...] Самое большое простое число

$$2^{44\,497}-1$$

содержит 13 395 разрядов. Оно во много раз больше, чем число всех атомов во Вселенной...»

Открытие нового простого числа позволяет, на основании сформулированной выше теоремы Евклида, сразу же указать новое, 25-е совершенное число:

$$2^{44\,496}(2^{44\,497}-1).$$

Это — огромное число: для его полной десятичной записи требуется 26 790 цифр.

По-видимому, отыскание следующих совершенных чисел по формуле Евклида будет либо представлять чисто спортивный интерес, либо преследовать цель показать возможности того или иного вычислительного комплекса.

Н. Х.

А. Земляков

Олимпиада по математике

Заключительный тур XVI Всесоюзной олимпиады школьников по математике, посвященной 60-летию образования СССР, состоялся с 14 по 22 апреля в Одессе. В нем приняло участие 156 школьников (43 восьмиклассника, 60 девятиклассников и 53 десятиклассника), представлявших все республики Советского Союза. В жюри олимпиады (около 50 человек) входили научные и педагогические работники Москвы, Ленинграда, Киева, Кишинева, Риги, Новосибирска и других городов, включая, конечно, и Одессу. Почетным председателем жюри был академик А. Н. Колмогоров, председателем — академик АН УССР Б. В. Гнеденко, его заместители — доцент механико-математического факультета МГУ Ю. В. Нестеренко, профессор Киевского университета М. И. Ядренко и профессор Одесского политехнического института Н. Б. Дивари.

Торжественное открытие олимпиады происходило 15 апреля в огромном зале Дома моряков, совсем рядом с Одесским портом и знаменитой Потемкинской лестницей. Открыл олимпиаду заместитель председателя Одесского горисполкома В. А. Черкасский. С большим интересом были выслушаны академики А. Н. Колмогоров и Б. В. Гнеденко; они говорили о прикладном значении математики, о ее возрастающей роли в современных науке и производстве. Участников приветствовали школьники Одессы и представители пионерских дружин пионерлагеря «Молодая гвардия», на территории которого были размещены участники олимпиады и проведены оба тура олимпиады.

Сама олимпиада, как обычно, проходила в два тура — 16 и 18 апреля. В каждом классе однодневное задание состояло из 4 задач, на решение которых отводилось 5 часов. Ниже мы приводим условия всех задач, указывая их авторов.

Задачи

8 класс

Первый день

1. На окружности с центром O_1 радиуса r_1 взяты точки M и K. В центральный угол MO_1K вписана окружность с центром O_2 радиуса r_2. Найдите площадь четырехугольника MO_1KO_2.

(*Б. Чиник*, Кишинев)

2. В числовых последовательностях (a_n) и (b_n) каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, причем $a_1=1$, $a_2=2$ и $b_1=2$, $b_2=1$. Сколько существует чисел, встречающихся как в первой, так и во второй последовательностях?

(*А. Анджан*, Рига)

3. Пусть m и n — натуральные числа. Докажите, что если для некоторых неотрицательных целых чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ число $2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_n}$ делится на 2^m-1, то $n\geqslant m$.

(*А. Григорян*, Москва)

4. Каждой вершине куба поставлено в соответствие некоторое неотрицательное действительное число, причем сумма всех этих чисел равна 1. Двое играют в следующую игру. Первый выбирает любую грань куба, второй выбирает другую грань и, наконец, первый выбирает третью грань куба. При этом выбирать грани, параллельные уже выбранным, нельзя. Докажите, что первый игрок может играть так, чтобы число, соответствующее общей вершине трех выбранных граней, не превосходило 1/6.

(*А. Берзиньш*, Рига)

Второй день

5. Натуральные числа от 1 до 1982 расположены одно за другим в некотором порядке. ЭВМ просматривает слева направо пары стоящих рядом чисел (первое и второе, второе и третье и т. д.) вплоть до последней и меняет местами числа в просматриваемой паре, если большее из них стоит левее. Затем она просматривает все пары, двигаясь справа налево от последней пары до первой, меняя местами числа в парах по тому же закону. По окончании этого просмотра работающий с ЭВМ оператор получил информацию, что число, стоящее на сотом месте, оба раза не сдвинулось со своего места. Найдите это число.

(*Ю. Нестеренко*, Москва)

6. Огурцовая река, протекающая в Цветочном городе, в районе пристани имеет несколько островов, общий периметр которых равен 8 метрам. Знайка утверждает, что можно отчалить на лодке от пристани и переправиться на другой берег, проплыв менее 3 метров. Берега реки в районе пристани параллельны, а ширина ее равна 1 метру. Прав ли Знайка?

(*Н. Карташов*, Киев)

7. На координатной плоскости Oxy нарисовали график функции $y=x^2$. Потом оси координат стерли — осталась только парабола. Как при помощи циркуля и линейки восстановить оси координат и единицу длины?

(*А. Анджан*, Рига)

8. Квадратная таблица $n\times n$ клеток заполнена целыми числами. При этом в клетках, имеющих общую сторону, записаны числа, отличающиеся одно от другого не больше чем на 1. Докажите, что хотя бы одно число встречается в таблице:

а) не менее чем $[n/2]$ раз ($[a]$ — целая часть числа a);

б) не менее чем n раз.

(*А. Берзиньш*, Рига)

9 класс

Первый день

1. Однажды трое мальчиков встретились в библиотеке. Один из них сказал: «Теперь я буду ходить в библиотеку через день». Второй заявил, что он будет ходить в библиотеку через два дня, а третий — что будет ходить в библиотеку через три дня. Слышавший их разговор библиотекарь заметил, что по средам в библиотеке выходной день. Мальчики ответили, что если у кого-нибудь из них дата прихода попадет на выходной день библиотеки, то он придет на следующий день и дальнейший отсчет посещений будет вести уже с этого дня. Так мальчики и поступили. Однажды в понедельник они вновь все вместе встретились в библиотеке. В какой день недели происходил описанный выше разговор?

(*А. Савин*, Москва)

2. В параллелограмме $ABCD$, в котором $|AB|\neq|BC|$, дано отношение длин диагоналей: $|AC|/|BD|=k$. Пусть луч AM симметричен лучу AD относительно прямой AC, луч BM симметричен лучу BC относительно прямой BD, M — общая точка лучей AM и BM. Найдите отношение $|AM|/|BM|$.

(*В. Дубровский*, Москва)

3. На окружности отмечено $3k$ точек, разделяющих ее на $3k$ дуг, из которых k дуг имеют длину 1, еще k дуг — длину 2, и остальные k дуг — длину 3. Докажите, что среди отмеченных точек найдутся две диаметрально противоположные.

(*В. Произволов*, Москва)

4. Внутри тетраэдра выбрана точка M. Докажите, что хотя бы одно ребро тетраэдра видно из точки M под углом, косинус которого не больше чем $-1/3$.

(*С. Гашков*, Москва)

Второй день

5. Докажите, что для всех положительных значений x выполнено неравенство

$$2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}>2\cdot 2^{\sqrt[6]{x}}.$$

(*В. Колотов*, Новосибирск)

6. Какое наименьшее количество чисел нужно вычеркнуть из совокупности чисел 1, 2, 3 ..., 1982 так, чтобы ни одно из оставшихся чисел не равнялось произведению двух других из оставшихся чисел? Каким образом это можно сделать?

(*Л. Курляндчик*, Ленинград)

7. В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги написано какое-то действительное число. Докажите, что в некоторой клетке написано число, не превосходящее чисел, написанных по крайней мере в четырех из восьми окружающих эту клетку клеток.

(*А. Григорян*, Москва)

8. Докажите, что из любой последовательности n действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ можно выбрать часть чисел так, чтобы выполнялись следующие три условия:

а) никакие идущие подряд три числа не выбраны,

б) из каждых трех идущих подряд чисел хотя бы одно выбрано,

в) абсолютная величина суммы выбранных чисел не меньше чем

$$\frac{1}{6}\left(|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|\right).$$

(*А. Анджан*, Рига)

10 класс

Первый день

1. Числа a, b, c лежат на интервале $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ и удовлетворяют равенствам:

$$\cos a=a,$$
$$\sin\cos b=b,$$
$$\cos\sin c=c.$$

Расположите эти числа в порядке возрастания.

(*А. Гессен*, Москва)

2. См. задачу 2 для 9 класса.

3. Существует ли натуральное число, делящееся на $\underbrace{11\ldots1}_{m\text{ раз}}$ и имеющее сумму цифр меньшую, чем m?

(*А. Григорян*, *Ю. Нестеренко*, Москва)

4. Замкнутая ломаная M имеет нечетное число вершин — последовательно $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$. Обозначим через $S(M)$ новую замкнутую ломаную, последовательные вершины $B_1, B_2, \ldots, B_{2n+1}$ которой являются серединами звеньев ломаной M: B_1 — середина $[A_1A_2]$, B_2 — середина $[A_3A_4]$, ..., B_{n+1} — середина $[A_{2n+1}A_1]$, B_{n+2} — середина $[A_2A_3]$, ..., B_{2n+1} — середина $[A_{2n}A_{2n+1}]$. Докажите, что в последовательности таким образом построенных ломаных

$$M_1=S(M),\ M_2=S(M_1),\ M_3=S(M_2),\ldots$$

найдется замкнутая ломаная, гомотетичная исходной ломаной M.

(*А. Келарев*, Свердловск)

Второй день

5. В квадратной таблице $n\times n$ клеток отмечено $n-1$ клеток. Докажите, что перестановками строк между собой и столбцов между собой можно добиться того, чтобы все отмеченные клетки лежали ниже диагонали таблицы.

(*Ю. Нестеренко*, Москва)

6. Докажите, что для любого натурального числа n и любого действительного числа a справедливо неравенство

$$|a|\cdot|a-1|\cdot\ldots\cdot|a-n|\geqslant\langle a\rangle\cdot\frac{n!}{2^n},$$

где $\langle a\rangle$ — расстояние от числа a до ближайшего к нему целого числа, $n!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$.

(Ю. Нестеренко, А. Гельфонд, Москва)

7. а) Существуют ли многочлены

$P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$

от переменных x, y, z такие, что выполнено тождество

$$(x-y+1)^3\cdot P+(y-z-1)^3\cdot Q+(z-2x+1)^3\cdot R=1?$$

б) Тот же вопрос для тождества

$$(x-y+1)^3\cdot P+(y-z-1)^3\cdot Q+(z-x+1)^3\cdot R=1.$$

(П. Гусятников, Ю. Нестеренко, Москва)

8. Вершины тетраэдра $KLMN$ лежат внутри, на гранях или на ребрах другого тетраэдра $ABCD$. Докажите, что сумма длин всех ребер тетраэдра $KLMN$ меньше, чем 4/3 суммы длин всех ребер тетраэдра $ABCD$.

(П. Гусятников, Москва)

Полный список призеров приводится на с. 60.

Хочется отметить тех десятиклассников, которые уже в третий раз становятся победителями. Это Г. Перельман (получал соответственно в 8, 9 и 10 классах дипломы II, I и I степеней), А. Спивак (дипломы III, II и I), С. Матюшов (I, III, II), К. Матвеев (II, II, II), С. Самборский (III, II, II), В. Титенко (I, II, II), А. Савкин (II, II, III), В. Шевчишин (II, I, III). Эти ребята входили в число кандидатов в команду СССР на XXIII Международную олимпиаду школьников (об этой олимпиаде, проходившей в Венгрии в июле 1982 г., см. «Квант» № 12).

Наряду с главными призами многие участники получили и специальные призы — за оригинальные решения задач, за лучшие результаты первого дня, за волю к победе. Специальный приз был вручен лучшей среди девочек — восьмикласснице А. Богомольной из школы № 534 г. Ленинграда, получившей диплом II степени. Приз «Кванта» — подшивка номеров за 1981 год — был вручен восьмикласснику Булату Оразбекову из школы им. Луначарского Кировского района Талды-Курганской области Казахской ССР. Подписку на «Квант» на 1983 год получат Сардон Гуломнабиев из школы пос. Шугнана Горно-Бадахшанской автономной области Таджикской ССР (8 класс) и Тарас Кицмет из школы села Горохолино Ивано-Франковской области УССР (9 кл.).

Город-герой Одесса тепло принимал своих гостей — участников олимпиады. В дни туров по вечерам ребята ходили в знаменитые одесские театры — оперы и балета, музыкальной комедии. Состоялись традиционные вечера дружбы народов СССР в различных школах Одессы, экскурсии по городу «Одесса — город-герой», «Одесса — подвиг», «Литературная Одесса», экскурсия по морю в порт Ильичевск. Как и все в нашей стране, 17 апреля участники олимпиады работали на Всесоюзном ленинском коммунистическом субботнике — на посадке деревьев в красивейшем парке пионерлагеря «Молодая гвардия».

19 апреля состоялся «математический бой» между командой школьников и командой жюри. Бой был упорным и почти равным — достаточно сказать, что перед заключительным конкурсом капитанов счет оказался равным. Все решил последний поединок: капитан школьников Гриша Перельман все-таки уступил капитану команды членов жюри С. В. Конягину (двукратному победителю международных математических олимпиад, ныне преподавателю механико-математического факультета МГУ, автору многих задач из Задачника «Кванта»). Как главный судья, я уверяю вас, что нисколько не подсуживал членам жюри — скорее, наоборот!

20 апреля во Дворце пионеров пионерлагеря «Молодая гвардия» состоялось торжественное закрытие олимпиады. С приветственным словом к участникам олимпиады обратился профессор М. И. Ядренко. Академик А. Н. Колмогоров выступил с напутствиями как победителям олимпиады, так и тем, кто не получил премий. Руководители жюри вручили призы, дипломы и грамоты участникам. Символ олимпиады был передан представителю города Кишинева, где будет происходить заключительный тур следующей, XVII олимпиады.

Т. Петрова, Л. Чернова

Олимпиада по физике

Заключительный этап XVI Всесоюзной олимпиады школьников по физике, посвященной 60-летию образования СССР, проходил с 14 по 21 апреля в столице Советского Азербайджана — орденоносном Баку.

143 представителя всех союзных республик приняли участие в очень серьезном соревновании. Среди них — победители республиканских олимпиад этого года и призеры предыдущей Всесоюзной олимпиады, получившие дипломы I и II степени.

Утром 15 апреля участники олимпиады возложили венки к памятнику В. И. Ленину и к мемориалу 26 Бакинских комиссаров, после чего в актовом зале Азербайджанского института нефти и химии им. М. Азизбекова состоялось торжественное открытие олимпиады. С теплыми приветственными словами к собравшимся обратились министр просвещения Аз.ССР Э. М. Кафарова, председатель жюри Всесоюзной олимпиады член-корреспондент АН Аз.ССР А. И. Мухтаров и заместитель председателя жюри профессор С. М. Козел. Ректор Института нефти и химии академик АН Аз. ССР И. А. Ибрагимов рассказал о славной истории института, первого высшего учебного заведения в Европе и Азии, в котором была начата подготовка инженеров для всех отраслей нефтяной промышленности. С гордостью говорилось о том, что в стенах этого института работали выдающийся физик, лауреат Ленинской премии академик И. В. Курчатов, академик Л. С. Лейбензон и член-корреспондент АН СССР К. А. Красусский; среди выпускников института — лауреат Ленинской премии, председатель Госплана СССР Н. К. Байбаков, Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской премии, министр газовой промышленности С. А. Оруджев и Герой Советского Союза летчик-космонавт СССР В. М. Жолобов.

Вечером того же дня гости побывали на спектакле в Театре оперы и балета им. М. Ф. Ахундова.

16 апреля проводился теоретический тур олимпиады. Восьмиклассникам было предложено решить четыре задачи (на работу отводилось 4 часа), девятиклассникам и десятиклассникам — по пять задач (времени давалось 5 часов). Приведем условия этих задач (большинство из них включено в Задачник «Кванта» в 7 и 8 номерах журнала за этот год).

Теоретический тур

8 класс

1. В небольшой чайник налита доверху теплая вода ($t_1=30°C$). Чайник остывает на 1 градус за время $\tau=5$ мин. Для того чтобы не дать чайнику остыть, в него капают из крана горячую воду ($t_2=45°C$). Масса одной капли $m_к=0{,}2$ г. Сколько капель в минуту должно капать в чайник, чтобы температура поддерживалась равной $t=30°C$? На сколько градусов подогреется вода за одну минуту, если начать капать втрое чаще? Считать, что температура воды в чайнике выравнивается очень быстро. Лишняя вода выливается из носика. В чайник входит $V=0{,}3$ л воды. Температура окружающего воздуха $t_0=+20°C$.

2. В схеме, указанной на рисунке 1, напряжение между контактами a и b постоянно. Когда параллельно резистору сопротивлением R_2 подключили резистор сопротивлением R, сила тока через этот резистор оказалась равной $I_1=10$ мА, а сила тока, протекающего через резистор сопротивлением R_1, увеличилась на $I_2=2$ мА. Найдите отношение сопротивлений резисторов R_1/R_2.

3. По гладкому столу движется, быстро вращаясь вокруг своей оси, волчок, имеющий форму конуса (рис. 2). При какой скорости v поступательного движения волчок не ударится о край стола, соскочив с него? Ось волчка остается вертикальной.

4. Ударная волна представляет собой область повышенного давления, распространяющуюся с большой скоростью v в положительном направлении оси X; в момент прихода волны давление p резко повышается (рис. 3). На пути распространения волны стоит клин, масса которого m, а размеры указаны на рисунке 4. Какую скорость приобретет клин сразу после прохождения через него фронта ударной волны? Считать, что приобретаемая клином скорость много меньше скорости волны; трение пренебрежимо мало.

9 класс

1. На горизонтальной поверхности стоит обруч радиуса R. Мимо него движется со скоростью v второй такой же обруч (рис. 5).

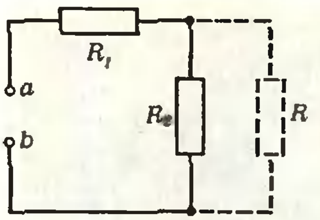


Рис. 1.

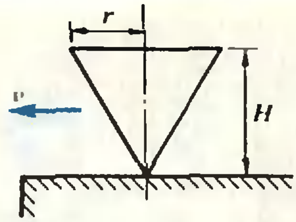


Рис. 2.

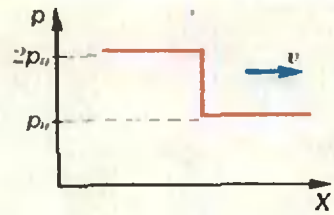


Рис. 3.

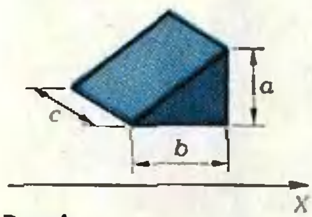


Рис. 4.

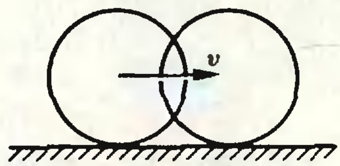


Рис. 5.

Рис. 6.

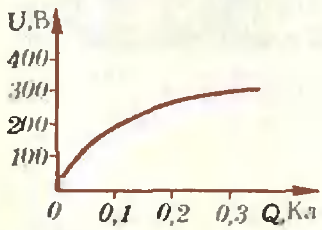


Рис. 7.

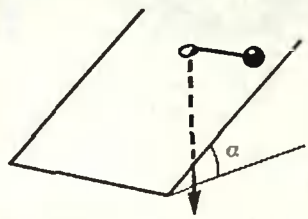


Рис. 8.

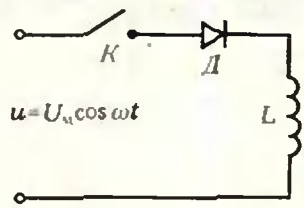


Рис. 9.

Найдите зависимость скорости верхней точки «пересечения» обручей от расстояния между их центрами. Обручи тонкие, второй обруч «проезжает» вплотную к первому.

2. Массивный цилиндр радиуса R опирается на две подставки одинаковой высоты (рис. 6). Одна из подставок неподвижна, другая отъезжает по горизонтали со скоростью v. С какой силой давит цилиндр на неподвижную подставку в тот момент, когда расстояние между точками опоры равно $R\sqrt{2}$? Трения нет. В первый момент подставки располагались очень близко друг к другу.

3. В теплоизолированном цилиндре под легким поршнем находится смесь равных количеств воды и льда: $m_в=m_л=1$ кг. Давление на поршень медленно увеличивают от начального значения $p_0=10^5$ Па до $p_1=2{,}5\cdot10^6$ Па. Определите, сколько льда при этом растает и какую работу совершит внешняя сила. Известно, что для уменьшения температуры плавления льда на 1 градус нужно довести давление до $14\cdot10^6$ Па. Сначала решите задачу, считая воду и лед несжимаемыми, а затем оцените поправку, которую дает учет сжимаемости. Известно, что для уменьшения объема некоторого количества воды на 1% давление нужно поднять до $20\cdot10^6$ Па. Сжимаемость льда примите для оценки равной половине сжимаемости воды. Удельная теплоемкость воды $c_в=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К), удельная теплоемкость льда $c_л=2{,}1\cdot10^3$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda=3\cdot10^5$ Дж/кг, плотность льда $\varrho_л=0{,}9\varrho_в$, где $\varrho_в$ — плотность воды.

4. Для лампы-вспышки применили нелинейный конденсатор (он заполнен диэлектриком, у которого диэлектрическая проницаемость зависит от напряженности поля). График зависимости напряжения U от заряда обкладок Q этого конденсатора приведен на рисунке 7. Конденсатор заряжают от батареи с напряжением $U_0=300$ В через резистор сопротивлением $R=10$ кОм. Найдите максимальную энергию вспышки. Оцените максимальное число вспышек за 1 минуту. Считать, что при вспышке конденсатор полностью разряжается. Минимальное начальное напряжение вспышки $U_1=250$ В.

5. Многопредельный амперметр высокой точности содержит для каждого предела измерений отдельный шунт. Амперметр включают в цепь на пределе 10 мА, и он показывает силу тока $I_1=2{,}95$ мА; когда его переключили на предел 3 мА, он показал $I_2=2{,}90$ мА. Какова была сила тока в цепи до подключения амперметра?

10 класс

1. На шероховатой наклонной плоскости (угол наклона α) лежит тело, к которому привязана легкая нерастяжимая нить (рис. 8). Конец нити пропущен через маленькое отверстие в плоскости. В начальный момент нить горизонтальна. Нить очень медленно вытягивают, при этом к моменту достижения отверстия она описывает половину окружности. Найдите величину коэффициента трения μ.

2. В настоящее время мощность всех источников энергии на Земле, используемых человечеством, составляет $\Delta P=10^{13}$ Вт, а мощность солнечной энергии, поступающей на Землю, — $P_0=10^{17}$ Вт. К какому перегреву ΔT поверхности Земли приводят земные источники энергии? Какова максимально допусти-

Председатель жюри олимпиады по физике А. И. Мухтаров с участниками олимпиады, получившими дипломы I степени. Слева направо: В. Банков, Е. Бруенков, С. Сюньков, А. Алексеев, А. Дешковский, Б. Макеев, Л. Закревский, А. Абанов, В. Молчанов.

Фото Г. Мирзаханова

мая величина ΔP_{max}, если предельный перегрев (из экологических соображений) не должен превышать величины $\Delta T_{max} = 0,1$ К? Известно, что энергия, излучаемая в единицу времени нагретым телом, увеличивается в 16 раз при повышении абсолютной температуры в 2 раза.

3. В одном из фантастических романов предлагался проект электростанции, использующей энергию морских течений и магнитное поле Земли. Проект заключается в следующем. В океан погружены две горизонтальные металлические пластины площади $S = 1$ км^2, расположенные на расстоянии $L = 100$ м одна над другой. Морская вода, обладающая удельным сопротивлением $\rho = 0,25$ Ом·м, течет с востока на запад со скоростью $v = 1$ м/с. Магнитное поле Земли в данном месте однородно, направлено с юга на север, а индукция этого поля равна по модулю $B = 10^{-4}$ Тл. В результате между пластинами появляется напряжение, а если их соединить с внешней нагрузкой, то в ней выделяется мощность. Определите максимальную величину этой мощности.

4. В схеме, приведенной на рисунке 9, диод $Д$ и катушка с индуктивностью L при помощи ключа K подключаются к источнику переменного напряжения $u = U_м \cos \omega t$. В момент времени $t = 0$ ключ K замыкается. Определите силу тока в катушке как функцию времени и постройте график этой функции. Диод и катушку считать идеальными. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

5. Межпланетный корабль в форме диска радиуса $r = 4$ м совершил мягкую посадку на Луну. Поверхность корабля покрыта черной (неотражающей) краской. Можно ли обнаружить прилунение корабля с помощью самого большого в мире советского телескопа БТА с диаметром объектива $D = 6$ м, если в фокальной плоскости установить фотопластинку и сфотографировать участок поверхности Луны, в котором находится предполагаемое место прилунения? Принять, что надежно различимая контрастность изображения на фотопластинке (то есть минимальная относительная разница в освещенности светлых и темных частей изображения) составляет $k = 0,05$. Оцените, при каком размере букв, выложенных космонавтами на поверхности Луны, их можно прочесть при наблюдении с Земли с помощью телескопа БТА. Расстояние от Земли до Луны $L = 4 \cdot 10^5$ км; фотографирование ведется в свете с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм.

17 апреля участники олимпиады работали на Всесоюзном субботнике, а вечером были на представлении в цирке. Приятным сюрпризом для участников — любителей шахмат явился сеанс одновременной игры, который провел чемпион мира среди юношей Гарик Каспаров. А жюри в этот день предстояла очень напряженная работа — проверка заданий теоретического тура. Результаты этой проверки отражены в следующей таблице:

		Номер задачи				
		1	2	3	4	5
Число работ с полным решением задачи	8 кл.	20	14	29	13	—
	9 кл.	20	9	4	4	11
	10 кл.	21	41	33	19	5
Число учащихся, не решивших задачу	8 кл.	—	6	2	4	—
	9 кл.	6	6	11	6	14
	10 кл.	16	3	3	3	18

Экспериментальный тур проводился 18 апреля. Каждому участнику предлагались две задачи. Подробный разбор задач экспериментального тура проведен в статье В. Орлова, помещенной в этом же номере журнала.

После эксперимента состоялась экскурсия в город нефтяников Сумгаит, а вечером — посещение Театра русской драмы им. С. Вургуна.

Следующий день был особенно напряженным для членов жюри, поскольку им предстояло не только проверить работы экспериментального тура, но и подвести окончательные итоги олимпиады.

20 апреля состоялось торжественное закрытие XVI Всесоюзной олимпиады школьников по физике. На нем были объявлены результаты олимпиады и вручены награды победителям. Имена призеров, получивших дипломы I, II и III степени, приведены на странице 61.

Специальный приз, учрежденный редколлегией и редакцией журнала «Квант», был вручен *Алие Булатовой* (Кокчетав). Подпиской на «Квант» на 1983 год награждены *Анатолий Ершов* (Златоуст), *Тимур Исхаков* (Душанбе), *Андрей Огнев* (Ленинск-Кузнецкий) и *Николай Хомяков* (Улан-Удэ).

Олимпиада закончилась. Одни участвовали в ней в последний раз (в этом году они простились со школой), другие смогут встретиться и помериться силами еще и еще раз. Желаем всем больших успехов!

В. Орлов

Экспериментальный тур олимпиады по физике

Решение экспериментальных заданий заключительного этапа XVI Всесоюзной олимпиады по физике проходило в трех вузах Баку: восьмиклассники работали в Азербайджанском педагогическом институте им. В. И. Ленина, девятиклассники — в Азербайджанском институте нефти и химии им. М. Азизбекова и десятиклассники — в Азербайджанском государственном университете им. С. М. Кирова.

Приведем условия всех экспериментальных заданий и решения некоторых из них.

8 класс

Задание 1. *Определите плотность твердого тела.*

Оборудование: сосуд с водой, пробирка, линейка, кусочки твердого тела.

Рассмотрим два способа решения этого задания: один был предложен составителями, второй — участниками олимпиады.

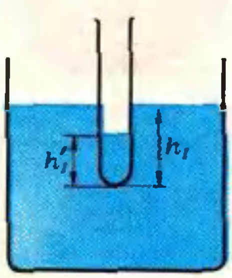


Рис. 1.

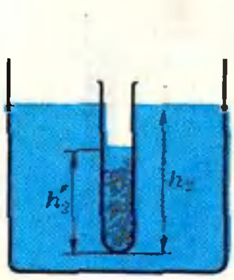


Рис. 2

Предполагалась следующая методика выполнения работы.

Сначала в пробирку наливается такое количество воды, чтобы пробирка в вертикальном положении плавала в сосуде с водой (рис. 1). Условие плавания пробирки можно записать в виде

$$F_{A1}=(M+m_0)g,$$

или

$$\varrho_0 S_1 h_1 g=(M+m_0)g, \qquad (1)$$

где $F_{A1}=\varrho_0 S_1 h_1 g$ — архимедова сила, ϱ_0 — плотность воды, S_1 — площадь внешнего сечения пробирки, M и m_0 — масса пробирки и налитой в нее воды соответственно.

Затем в пробирку насыпаются кусочки проволоки (рис. 2). При этом для увеличения точности опыта желательно максимально возможное погружение пробирки в воду. Запишем условие плавания пробирки для этого случая:

$$F_{A2}=(M+m_0+m)g,$$

или

$$\varrho_0 S_1 h_2 g=(M+m_0+m)g, \qquad (2)$$

где m — масса твердого тела (кусочков алюминиевой проволоки).

Из выражений (1) и (2) получаем

$$m=\varrho_0 S_1 (h_2-h_1).$$

Объем твердого тела легко определить по изменению объема воды в пробирке при погружении в нее проволоки:

$$V=S_2(h'_2-h'_1),$$

где S_2 — площадь внутреннего сечения пробирки.

Следовательно, искомая плотность твердого тела равна

$$\varrho=\frac{m}{V}=\varrho_0\frac{S_1(h_2-h_1)}{S_2(h'_2-h'_1)}\approx\varrho_0\frac{h_2-h_1}{h'_2-h'_1}.$$

Эта методика давала хорошие результаты при работе со стандартной цилиндрической и тонкостенной пробиркой, когда можно было пренебречь различием в сечениях S_1 и S_2 и изменением площади сечения пробирки по ее длине. Однако учащимся были предложены самодельные конические толстостенные пробирки, с которыми описанная выше методика приводила к большой погрешности измерений (до 30%).

Приятно отметить, что некоторые участники олимпиады сумели найти выход из этого положения. Так, интересную методику выполнения работы с предложенным оборудованием разработали *Н. Паршин* (Пенза) и *А. Дешковский* (Барановичи). Суть этой методики сводится к одинаковому погружению в сосуд с водой пробирки, заполненной один раз только кусочками проволоки, а другой раз — только водой. В таком случае масса твердого тела равна $m=m_0=\varrho_0 S_2 l$, где l — высота налитой в пробирку воды. Для определения объема твердого тела пробирка с водой вынимается из сосуда, и в нее погружается твердое тело. По высоте Δl поднятия воды в пробирке определяется объем тела: $V=S_2\Delta l$ и его плотность:

$$\varrho=\frac{m}{V}=\varrho_0\frac{S_2 l}{S_2\Delta l}=\varrho_0\frac{l}{\Delta l}.$$

Как видно, в это выражение для плотности площадь сечения пробирки вообще не входит, что существенно уменьшает погрешность измерений.

З а д а н и е 2. *Исследуйте поведение шарика, попавшего на наклонную плоскость после его движения по желобу.*

1) Найдите зависимость дальности скатывания шарика по горизонтали от высоты наклонной плоскости. Постройте график этой зависимости.

2) Рассчитайте по полученным экспериментальным данным скорость шарика в момент, когда он после скатывания с желоба попадает на наклонную плоскость.

3) Рассчитайте эту же скорость, рассматривая движение шарика по желобу.

Сравните полученные результаты.

Оборудование: наклонная плоскость, желоб, штатив, шарик, линейка, миллиметровая бумага.

Это задание участники олимпиады выполнили, в основном, неплохо. Однако многие не учитывали вращение шарика, поэтому результаты, полученные в пунктах 2) и 3), различались на величину, бо́льшую погрешности измерений.

9 класс

З а д а н и е 1. *Определите избыточное, по отношению к атмосферному, давление воздуха в воздушном шарике.*

Оборудование: весы, разновес, воздушный шарик, нить, линейка, термометр.

Последовательное взвешивание надутого шарика (m_1g), а затем его оболочки (m_2g) позволяет найти разность (Δmg) между силой тяжести воздуха в шарике и архимедовой силой (F_A), действующей на надутый шарик:

$$m_1g=(m_в+m_{об})g-F_A,\quad m_2g=m_{об}g,$$

$$\Delta mg=m_1g-m_2g=m_вg-F_A=\varrho Vg-\varrho_0 Vg,$$

или

$$\Delta m=(\varrho-\varrho_0)V,$$

где ϱ и ϱ_0 — плотность воздуха в шарике и в атмосфере, V — объем надутого шарика, $m_{об}$ и $m_в$ — массы оболочки шарика и воздуха в нем. (Отметим типичную ошибку: многие считали полученное из опыта значение Δm массой воздуха в шарике. Это приводило к большой ошибке: из опыта $\Delta m\approx 0{,}3$ г, а масса воздуха в шаре объемом $V\approx 10$ л равна $m_в=\varrho_в V\approx 13$ г.)

Выражая с помощью закона Менделеева — Клапейрона плотности ϱ и ϱ_0 $\left(\varrho=\frac{pM}{RT},\ \varrho_0=\frac{p_0M}{RT}\right)$, получаем

$$\Delta m=\frac{(p-p_0)MV}{RT},$$

откуда искомое избыточное давление воздуха в шарике равно

$$\Delta p=p-p_0=\frac{\Delta mRT}{MV}.$$

Для получения численного ответа необходимо снять показание термометра и измерить объем надутого шарика. Если бы шарик имел сферическую форму, его объем V можно было бы рассчитать по формуле

$$V=\frac{4}{3}\pi R_0^3=\frac{4}{3}\pi\frac{l^3}{8\pi^3}=\frac{l^3}{6\pi^2},$$

где $l=2\pi R_0$ — длина окружности максимального сечения шарика, измеренная с помощью нити и линейки. Так как в действительности форма шарика не идеальная, то l можно определить как среднее арифметическое между длинами окружностей двух взаимно перпендикулярных сечений. Некоторые участники считали шарик эллипсоидом и рассчитывали объем по формуле $V=4/3\pi abc$, где a, b, c — длины полуосей эллипсоида. При заданном максимальном диаметре шарика $\approx 0{,}3$ м избыточное давление Δp было порядка $(2-3)\cdot 10^3$ Па. После окончания эксперимента этот результат подтверждался прямым экспериментом с помощью манометра (рис. 3).

Представляет интерес прямая, хотя и грубая оценка избыточного давления, предложенная участником олимпиады *М. Шмаковым* (Москва). Непосредственно ставя шарик на лист белой бумаги и нагружая его сверху грузами известной массы m, он определял площадь сечения S следа шарика на бумаге (рис. 4). Поскольку небольшой груз не вызывал сколь-нибудь существенного изменения объема шара и давления воздуха в нем, $\Delta p=mg/S$.

Дополнительные баллы давались тем, кто учитывал поправку, внесенную стопроцентной

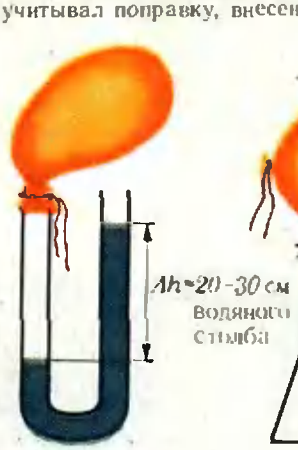


Рис. 3.

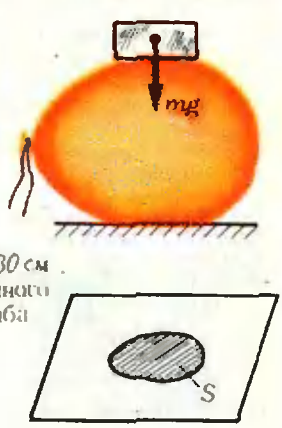


Рис. 4.

влажностью воздуха в шарике. Учет этого фактора приводит, во-первых, к правильной методике выполнения работы: взвешивание ненадутого шарика надо проводить после взвешивания надутого (в этом случае масса капелек воды, образующихся на стенках шара, вычитается) и, во-вторых, к дополнительной поправке, связанной с тем, что давление водяных паров в шарике выше, чем в окружающем воздухе (погрешность, вносимая этим фактором, могла быть сравнимой с погрешностями измерений Δm и V).

Некоторые участники пытались учесть изменение химического состава воздуха в шаре: увеличение содержания углекислого газа, азота и водяных паров.

Дополнительные баллы давались также участникам, которые по результатам опыта сделали оценку удельной поверхностной энергии σ упругой деформации резиновой пленки:

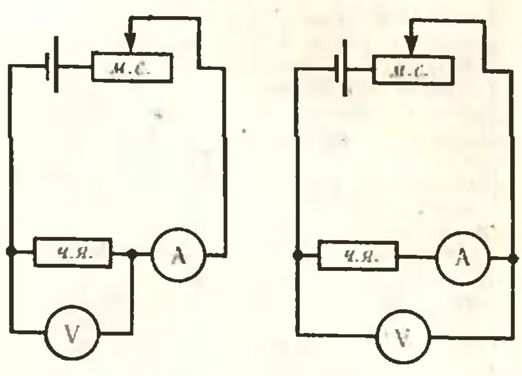
$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R_0}, \quad \sigma = \frac{\Delta p R_0}{2}.$$

Задание 2. *Известно, что в коробке («черном ящике») находится нелинейный элемент, параллельно которому подключен резистор. Определите, в каких пределах может находиться сопротивление резистора.*

Оборудование: «черный ящик» (ч. я.), источник постоянного тока (батарея 3336-Л), магазин сопротивлений (м. с.), два авометра, проводники, линейка, миллиметровая бумага.

Для определения пределов сопротивления резистора необходимо снять вольтамперную характеристику «черного ящика», собрав одну из схем, изображенных на рисунках 5, *а* и *б*.

Вследствие неидеальности электроизмерительных приборов обе схемы дают определенные погрешности измерений, поэтому в полученную вольтамперную характеристику надо внести соответствующие поправки. Это можно сделать, например, графическим способом, как это предложил на олимпиаде М. Дьячков (п. Черноголовка Московской обл.). Выбрав схему по рисунку 5, *б*, он строил графики зависимости $I_1(U)$ для «черного ящика» вместе с амперметром, $I_2(U)$ для амперметра и $I(U)$ для «черного ящика» (поскольку через амперметр и «черный ящик» течет один и тот же ток, напряжение на «черном ящике» при каждом значении силы тока равно разности показания вольтметра и напряжения на амперметре). Все три характеристики представлены на рисунке 6.



а) *б*)

Рис. 5.

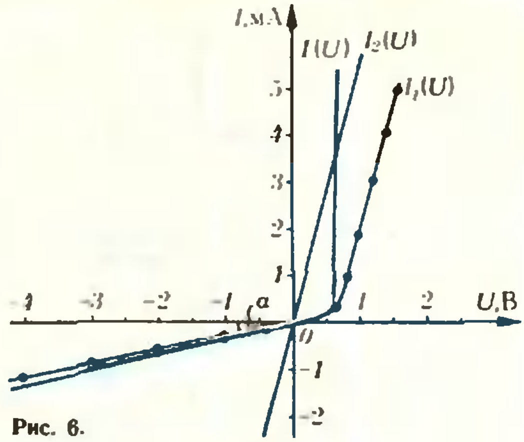


Рис. 6.

Из вольтамперной характеристики «черного ящика» следует, что, если на участке от −4 до +0,4 В нелинейный элемент вообще не проводит ток (либо этот ток очень мал), то сопротивление резистора, подключенного параллельно «черному ящику», равно

$$R = \mathrm{ctg}\,\alpha \approx (3{,}2 \pm 0{,}16) \cdot 10^3\ \text{Ом}.$$

Это — нижний предел искомого сопротивления. Верхний предел определить нельзя, так как полученная вольтамперная характеристика может в принципе принадлежать и самому нелинейному элементу.

Таким образом, результат надо записать в виде

$$\infty > R > (3{,}2 \pm 0{,}16) \cdot 10^3\ \text{Ом}.$$

10 класс

Задание 1. *Определите число витков и индуктивность катушки.*

Оборудование: источник переменного тока, катушка с сердечником, реостат (потенциометр), вольтметр переменного тока, проводники, миллиметровая бумага, циркуль, резистор с известным сопротивлением, проволока.

Определение числа витков катушки особой трудности не представляет. Намотав на замкнутый сердечник катушки максимально возможное число витков n из куска проволоки (то есть создав вторичную обмотку), нужно подключить катушку к источнику переменного напряжения и измерить напряжения на первичной (U_1) и вторичной (U_2) обмотках получившегося трансформатора. Тогда искомое число витков n_x катушки равно

$$n_x = n\frac{U_1}{U_2}.$$

Для определения индуктивности катушки надо собрать электрическую цепь, изображенную на рисунке 7, и определить напряжения U_R и U_L:

$$U_R = IR, \quad U_L = IX_L = I2\pi\nu L,$$

$$L = \frac{R}{2\pi\nu}\frac{U_L}{U_R}.$$

Напряжение U_R можно измерить непосредственно, а напряжение U_L можно найти из векторной диаграммы (рис. 8), предвари-

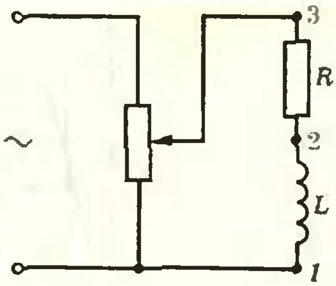


Рис. 7

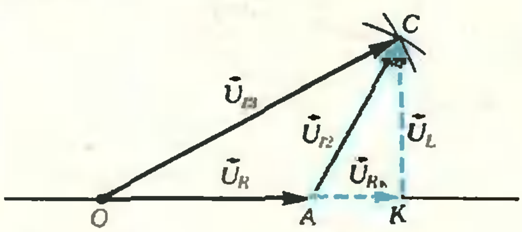


Рис. 8

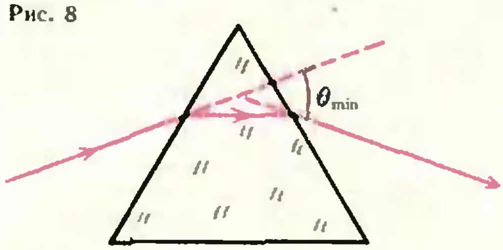


Рис. 9.

тельно измерив U_{12}, U_{23} и U_{13}. По горизонтали откладываем, в некотором масштабе, значение $U_{23}=U_R$, затем из точки O с помощью циркуля откладываем значение U_{13}, из точки A — значение U_{12} и получаем точку C. Теперь проводим векторы $\vec U_R$, $\vec U_{12}=\vec U_{R_к}+\vec U_L$, $\vec U_{13}=\vec U_R+\vec U_{12}$, и векторная диаграмма построена. Из этой диаграммы сразу можно определить индуктивное напряжение U_L, а следовательно, и искомую индуктивность L. Попутно легко определить и активное сопротивление катушки $R_к$, которым в условиях данной задачи никак нельзя было пренебрегать (как это сделали многие участники).

З а д а н и е 2. *Исследуйте оптические свойства треугольной призмы.*

1) Постройте ход лучей в призме и определите показатель преломления вещества, из которого изготовлена призма.

2) Найдите из опыта угол наименьшего отклонения θ_{min} светового луча призмой.

3) Проведите расчет показателя преломления по найденному значению угла наименьшего отклонения и преломляющему углу призмы φ, используя формулу

$$n=\frac{\sin(\varphi+\theta_{min})/2}{\sin\varphi/2}.$$

Оборудование: призма, булавки, линейка, миллиметровая бумага, циркуль, листы белой бумаги.

Это задание больших затруднений не вызвало. Однако лишь немногие участники олимпиады доказали, что наименьшее отклонение светового луча соответствует случаю, когда преломленный на первой грани луч идет параллельно основанию призмы (рис. 9). И еще одно: при определении показателя преломления для повышения точности измерения было необходимо угловые измерения заменить линейными.

Призеры XVI Всесоюзной олимпиады школьников

М а т е м а т и к а

Дипломы I степени

п о 8 к л а с с а м получили

Абакумов Е. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Бураго А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Виксна Ю. (Алуксне, с. ш. № 1),
Игнатьев К. (Москва, с. ш. № 2),
Оридорога Л. (Донецк, с. ш. № 64),

п о 9 к л а с с а м —

Кохась К. (Ленинград, с. ш. № 239);

п о 10 к л а с с а м —

Левин А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Перельман Г. (Ленинград, с. ш. № 239),
Спивак А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Шестаков С. (Москва, с. ш. № 2).

Дипломы II степени

п о 8 к л а с с а м получили

Астрелин А. (Новосибирск, с. ш. № 121),
Богомольная А. (Ленинград, с. ш. № 534),
Грудманс Д. (Рига, ФМШ № 1),
Луйсекулов М. (Аркалык, с. ш. № 6);

п о 9 к л а с с а м —

Бриталс Я. (Рига, ФМШ № 1),
Буриченко В. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Жуков И. (Ленинград, с. ш. № 239),
Садотов С. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 14),
Семенов А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Черенс К. (Рига, ФМШ № 1);

п о 10 к л а с с а м —

Беспалов Ю. (Киев, ФМШ при КГУ),
Дранко О. (Киев, ФМШ при КГУ),
Дубицкас А. (Таурагс, с. ш. № 1),
Зиганшин И. (Димитровград, с. ш. № 5),
Кисиль В. (Одесса, с. ш. № 33),
Матвеев К. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Матюшов С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Николаев И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Самборский С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Титенко В. (д. Блужа Минской обл.).

Дипломы III степени

п о 8 к л а с с а м получили

Володько А. (Минск, с. ш. № 50),
Гараев М. (Физули, с. ш. № 2),

Глуховский Л. (Москва, с. ш. № 342),
Губарев А. (Фатеж, с. ш. № 1),
Дулов Н. (Киров, с. ш. № 59),
Либлик А. (п. Ныо Эстонской ССР),
Маргвелашвили Г. (Кутаиси, ФМШ),
Масляков И. (Иваново, с. ш. № 22),
Михайлюк В. (Киев, ФМШ при КГУ),
Мусаелян К. (Ереван, с. ш. № 55),
Николаев В. (Хабаровск, с. ш. № 2),
Примак С. (Луцк, с. ш. № 9),
Рагуцкас Г. (Вильнюс, с. ш. № 41),
Саймер М. (Таллин, с. ш. № 21),
Хрычиков В. (Севастополь, с. ш. № 24);

по 9 классам —

Байбородин О. (Сыктывкар, с. ш. № 1),
Биллинг Ю. (Калинин, с. ш. № 6),
Виноградов А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Ерошкин О. (Днепропетровск, с. ш. № 15),
Итенберг И. (Ленинград, ФМШ № 18 при ЛГУ),
Карпенко Н. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Марголин Г. (Калинковичи, с. ш. № 1),
Николаев А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Орлов Д. (Владимир, с. ш. № 8),
Парновский Л. (Львов, с. ш. № 52),
Самборский Р. (Тернополь, с. ш. № 9),
Харитонов Ф. (Николаев, с. ш. № 38),
Юровский С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ);

по 10 классам —

Васильев А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Закиров А. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Мазуров О. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Руденко В. (Белая Церковь, с. ш. № 16),
Савкин А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Слуцкий Б. (Новосибирск, с. ш. № 130),
Чалых О. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Шевчишин В. (Львов, с. ш. № 11).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Абанов А. (Красноярск, с. ш. № 170),
Дешковский А. (Барановичи, с. ш. № 15),
Закревский Л. (Минск, с. ш. № 50);

по 9 классам —

Алексеев А. (Ленинград, с. ш. № 202),
Банков В. (Алексин, с. ш. № 1),
Бруенков Е. (Коммунарск, с. ш. № 22),
Молчанов В. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ);

по 10 классам —

Макеев Б. (Москва, с. ш. № 361),
Сюньков С. (Саратов, с. ш. № 13).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Булатова А. (Кокчетав, с. ш. № 1),
Воротнев П. (Ленинград, с. ш. № 443),
Кононенко Т. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Курников И. (Гатчина, с. ш. № 1),
Паршин Н. (Пенза, с. ш. № 6),
Писарев А. (Невинномысск, с. ш. № 11),
Чеботарь О. (Хабаровск, с. ш. № 2);

по 9 классам —

Бирзвалкс В. (Рига, с. ш. № 1),
Гниловский А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Гребнев И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Дьячков М. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Малышев В. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Савров М. (Азов, с. ш. № 13),
Стефанов М. (Москва, с. ш. № 1),
Сыскин В. (Новосибирск, с. ш. № 130),
Шмаков М. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ);

по 10 классам —

Базалий Я. (Донецк, с. ш. № 17),
Калда Я. (Таллин, с. ш. № 1),
Пентегов В. (Киев, с. ш. № 145),
Пироженко А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Цветков П. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Чичкань С. (Киев, с. ш. № 145).

Дипломы III степени

по 8 классам получили

Вахрушев Я. (Архангельск, с. ш. № 49),
Епифанов С. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Ершов А. (Златоуст, с. ш. № 25),
Огнев А. (Ленинск-Кузнецкий, с. ш. № 2),
Сайко Г. (Киев, с. ш. № 145),
Усиевич Б. (Москва, с. ш. № 2),
Ярунин Н. (Павлово, с. ш. № 1);

по 9 классам —

Альтман И. (Одесса, с. ш. № 63),
Баранов Г. (Донецк, с. ш. № 17),
Буриченко А. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Ефимов С. (Баку, с. ш. № 91),
Житомирский М. (Харьков, с. ш. № 27),
Ивойлов И. (Казань, с. ш. № 131),
Катаргин А. (Салават, с. ш. № 6),
Кононов Р. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Мокеев И. (Ангарск, с. ш. № 10),
Чернышов С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ);

по 10 классам —

Альтфедер И. (Нальчик, с. ш. № 9),
Баталов С. (Арзамас, с. ш. № 2),
Бочко С. (Братск, с. ш. № 18),
Иващенко А. (Тольятти, с. ш. № 26),
Качаев И. (Красноярск, с. ш. № 10),
Ким С. (Алмалык, с. ш. № 15),
Накас А. (Вильнюс, с. ш. № 15),
Прядко Л. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Свирида Д. (Москва, с. ш. № 179),
Шарифов Т. (Белоканский р-н АзССР, Кабагельская с. ш.).

Стандартные приемы программирования

Урок 2. Линейный поиск

Задачи поиска являются одними из наиболее распространенных: они возникают при построении трансляторов и во многих программах, больших и малых, с которыми вам придется встретиться. Если поиск ведется в файле, или если массив, в котором ищут, неупорядочен (то есть по значению элемента нельзя узнать, где он расположен), то единственный возможный вид поиска — это *линейный поиск*, при котором информация просматривается от начала к концу, элемент за элементом. Даже если массив упорядочен, но имеет малую длину, нет смысла применять что-либо сложнее,чем линейный поиск. Таким образом, все три подготовительные задачи*) к этому уроку — это задачи линейного поиска.

Почему же задачу 2 нельзя свести к задаче 1, просматривая массив с конца? Дело в том, что имеются случаи, когда расположение конца заранее не известно или к нему нет доступа. Например, когда поиск ведется в массиве неизвестной нам длины, конец которого определяется по специальному значению (скажем, по пробелу); или ищем в файле, который может просматриваться только от начала к концу; или значения интересующих нас элементов поступают по одному (как в Задании 2.1) и обрабатываются без запоминания.

Все приведенные решения правильны, однако решения *а*) выполнены в строгом соответствии с современной теорией структурного программирования (именно так вас учили в Заочной школе), в то время как решения *б*) используют оператор goto*), который современной теорией к широкому употреблению не рекомендуется (поэтому на первых этапах о нем даже не упоминалось).

Характерной особенностью задач поиска является то, что имеется две причины для завершения поиска: нужный элемент нашелся или кончился массив. Соответственно, в программах имеется два условия окончания цикла: $i>n$ (не нашли) или нашли нужный элемент. При этом в вариантах *а*) оба условия располагаются в заголовке цикла, а в вари-

*) См. Урок 1, «Квант» № 10.

*) В решении *б*) используется оператор goto *m*, где *m* — натуральное число, и конструкция *m*: оператор. *m* в таком контексте называется *меткой* оператора. Оператор goto заставляет ЭВМ продолжить выполнение программы с оператора, перед которым стоит метка *m*.

Решения

Во всех решениях: *x* — заданное значение, *k* — искомый индекс

а)

Задача 1 (первый подходящий)

```
i:=1; k:=0;
while (i<=n) AND (k=0) do
begin
  if a[i]=x then k:=i;
  i:=i+1
end;
```

б)

```
for k:=1 to n do
  if a[k]=x then goto 7;
k:=0;
7:...
```

Задача 2 (последний подходящий)

```
k:=0;
for i:=1 to n do
  if a[i]=x then k:=i;
```

Задача 3 (*m*-й подходящий)

а)

```
k:=0; i:=1; j:=0;
while (i<=n) AND (k=0) do
begin if a[i]=x then
      begin j:=j+1;
         if j=m then k:=i
       end;

    i:=i+1
 end;
```

б)

```
j:=0;
for k:=1 to n do
if a[k]=x then
   begin j:=j+1;
      if j=m then goto 7;
   end;
k:=0;
7:...
```

анте б) в заготовке цикла располагается только первое условие, а для выхода из цикла при обнаружении нужного элемента используется **goto**.

Для программ в задачах поиска характерно «аварийное» присваивание $k:=0$, которое необходимо в случае, когда нужного элемента в массиве нет.

Какой же вариант лучше — *а*) или *б*)? Программы *а*) состоят только из циклов и ветвлений (условных операторов), каждый цикл и каждое ветвление имеет один вход и один выход, поэтому построенные таким способом программы более удобны для исследования их свойств. Но варианты *б*) имеют более короткий текст, меньше операторов и переменных и меньше операций на каждом шаге (быстрее выполняются).

Задачи поиска, где необходим досрочный выход из цикла, представляют собой один из очень немногих случаев, когда применение оператора **goto** оправдано (для выхода из цикла).

Контрольное задание

2.1. Решить рассмотренные выше задачи 1—3 для случая поиска в файле.

2.2. За один просмотр массива найти номера первого и последнего элемента, равного заданному. (При их отсутствии получить нули.)

2.3. Даны основной массив и массив из n целых чисел, такой что $n[i]<n[i+1]$. За один просмотр основного массива выписать в третий массив индексы $n[1]$-го, $n[2]$-го и т. д. элементов со значением x.

Подготовительные задачи к уроку 3*)

1. Дано 2 массива длины n с элементами a_i и b_i. Пересчитать их по формулам: $a_i':=\dfrac{a_i+b_i}{2}$, $b_i':=\sqrt{a_ib_i}$, то есть в массив a поместить среднее арифметическое соответствующих элементов, а в массив b — среднее геометрическое.

2. Дана таблица чисел a_{ij} размером $n\times n$. Поделить все элементы каждой строки таблицы на диагональный элемент этой строки: $a_{ij}':=\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$. Результат записать в ту же таблицу.

3. Дана квадратная таблица размером $n\times n$. Пересчитать ее значения по формуле $a_{ij}':=a_{ji}$, то есть симметрично перевернуть ее относительно диагонали, записав результат в ту же таблицу.

(Такие таблицы математики называют ***матрицами***, а симметричный переворот относительно диагонали называется ***транспортированием***.)

После решения задач внимательно сравните условия и решения всех задач и (так же, как в прошлом уроке) попробуйте ответить на вопросы:

а) что общего в условиях этих задач?

б) что общего в решениях этих задач?

Л. Штернберг

*) Решения этих задач присылать не нужно!

Ответы, указания, решения

Формулы и графики

1. Возможные варианты ответов:

А — $y=(x+1)^2(1-x)(x-2)^2$.

Б — $y=\dfrac{x}{(x^2-1)^2}$.

В — $y=\dfrac{1}{(x+1)^2x(x-1)}$.

2. А — 6, Б — 4, В — 8, Г — 23, Д — 25, Е — 2, Ж — 15, З — 20, И — 13.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 8)

Задание 15 (Е. Геллер — А. Карпов. Москва, 1976., первенство СССР, высшая лига). Положение интересно тем, что эффектиая комбинация белых вынуждена. В противном случае размениваются ферзи, и черные остаются с большим материальным перевесом. **25.Ф:е6!! fe 26. Kfg6+ Ф:g6 27. K:g6+ Kpe8 28. K:h8.** Комбинация закончилась успешно для белых. Отчаянные попытки чемпиона мира спастись не удаются. **28...Ла4 29. Лd1 Ke7 30. C:e7 Kp:e7 31. Kg6+ Kpf7 32. Kf4 C:e5 33. de Л:f4 34. Лc1! Kpe8 35. c6 Kpd8 36. c7+ Kpc8 37. g3 Ла4. 38. Лс6 Ла2 39. Л:е6 g5 40. Лd6 Лd2 41. e6 Kp:c7 42. e7. Черные сдались.**
Задание 16 (т. Петросян — А. Карпов. Московский международный турнир «звезд», 1981 г.) Оказывается, в случае 34...**g4** 35. Л:d5 **gf** у белых есть сильный промежуточный ход 36. **g4!**, и после 36...ed 37. **gf** черным нужно побеспокоиться, чтобы сделать ничью. Впрочем, тем же результатом закончилось дело и в партии: **34...Л:d4 35. Ф:d4 Фс2 36. hg Cd3. Ничья.**

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 10)

1. 12. На одной стороне листа было 7, а на другой — 5 кружочков, и воспитательница листок перевернула.

2. Ход лучей света показан на рисунке 1. Ложка закрывает часть лучей, падающих к одному краю чашки, и часть лучей, отражающихся от противоположного ее края. Поэтому на зайчике возникнут две тени — сверху и снизу, как на рисунке 2. По мере приближения ложки к поверхности чая эти тени будут расти и, наконец, сольются.

3. Наибольшее произведение дают числа 96420 и 87531, а наименьшее — числа 10468 и 23579.

4. Способы разрезания арбузов изображены на рисунке 3. У первого арбуза центральный кусок имеет две корки, а у второго уже две части будут иметь по две корки. Третий арбуз

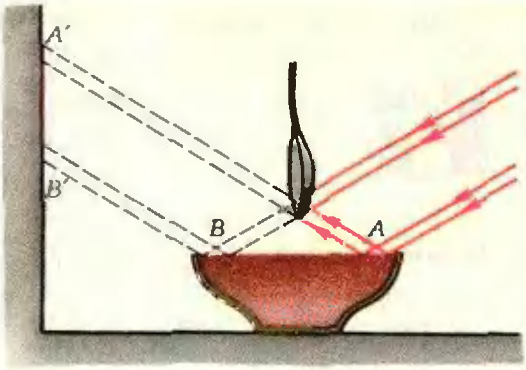


Рис. 1.

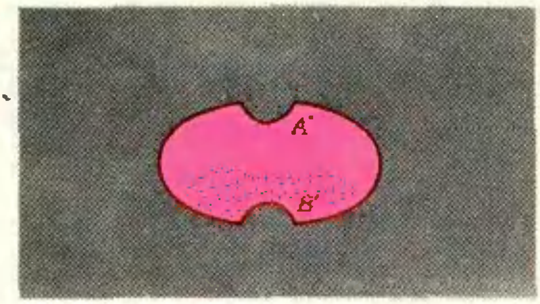


Рис. 2.

Рис. 3.

сначала разрезали по трем взаимно-перпендикулярным плоскостям, проходящим через его центр — получилось 8 кусков; затем сделали четвертый, косой разрез, который все эти куски, кроме «заднего», разделил на два — получилось 15 кусков, однако один из них (а именно центральный — самая сладкая часть мякоти передней «восьмушки») не имеет корки. От этого арбуза осталось 14 корок. Возможны и другие варианты разрезания.

Номер оформили:
Б. Галкин, Л. Денисенко, М. Дубах,
Н. Кузьмина, Э. Назаров, А. Пермин, Е. Темчурина

Заведующая редакцией Л. Чернова
Художественный редактор Т. Макарова
Корректор М. Медведская

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 251-82-42

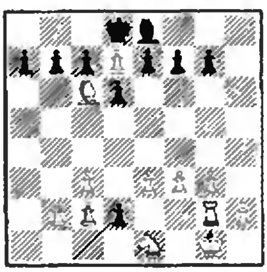
Сдано в набор 17.9.82. Подписано в печать 3.11.82.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 7,15 Т-20908
Цена 40 коп. Заказ 2378 Тираж 175 067 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку кандидат технических наук, мастер спорта СССР по шахматам Е. Гик.

ПУТЕШЕСТВИЕ В ПРОШЛОЕ

В «Кванте», 1982, № 5 мы уже познакомились с интересным жанром шахматной композиции — ретроанализом. Для решения ретрозадач требуется восстановить предысторию позиции, рассуждения часто носят не столько шахматный, сколько логический характер, и поэтому, думаем, читателям «Кванта» будет интересно время от времени возвращаться к жанру ретрозадач



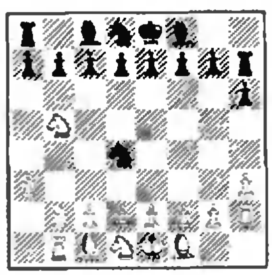
Н. Плаксин, 1981 г.
Мат в 1 ход

Решение очевидно — de$\Phi\times$. Осталось только выяснить, кто именно матует — белые (d7:e8$\Phi\times$) или черные (d2:e1$\Phi\times$). Предположим, что белые. Тогда последний ход черных был или Крс8—d8, или d3—d2. В случае Крс8—d8 белые предыдущим ходом давали шах — е6:d7+. Как же пешка а2 попала на поле е6? Проверим баланс черных фигур. Десять из них находятся на доске. Одну черную фигуру взяла пешка d2—d2:c3, а пять взяла пешка а2, пройдя по диагонали. Наконец, черный чернопольный слон погиб на поле f8, так как черные пешки g7 и е7 занимают исходные места. Итого 10+1+5+1=17... Дебаланс! В начале партии у каждой стороны имеется только по 16 боевых единиц. Итак, ретроанализ отвергает возможность последнего хода черных Крс8—d8.

Но почему черные не могли пойти пешкой d3—d2? Ведь баланс белых фигур сходится — двенадцать белых фигур на доске и четыре взяла черная пешка по дороге с h7 на d3. Какие же фигуры взяла черная пешка? Разумеется, те, которые отсутствуют: ферзя, ладью, коня и слона. Однако слоны в шахматах разноцветные, и чернопольный слон не мог быть взят на белопольной диагонали. Итак, эффект цветности отвергает и ход черных d3—d2.

Значит, последними ходили белые, а мат объявляют черные — **d2:e1$\Phi\times$**.

Одна из интереснейших ретротем носит название «чет-нечет». О ней гроссмейстер по шахматной композиции В. Корольков сказал: «В условном мире ретроанализа имеется немало широких дорог, по которым можно совершать волнующие путешествия в прошлое. Но если вы захотите прогуляться вдали от шумных путей, то идите по неширокой лесной тропинке, в начале которой прочтете таинственную надпись: «чет — нечет»



В. Корольков, 1960 г.
Играющий взялся за коня d4, какой ход он сделает?

Как будто сомнений нет — черные объявляют мат — Kd4:c2$\times$. Однако не будем спешить с ответом. Выясним сначала, чей ход в этой позиции.

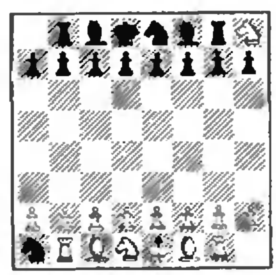
Обратим внимание на одну особенность шахматной партии. Пусть, скажем, сыграно 1. е2—е4 е7—е5. Каждая из сторон сделала нечетное число ходов — по одному (нечет), и ход белых. После 2. Kg1—f3 у белых четное число ходов (чет), а у черных нечетное (нечет), ход черных. Закон прост: при совпадении четностей ходят белые, при несовпадении — черные.

С этой математической точки зрения и подойдем к анализу нашей позиции. Посмотрим на белые фигуры. В распоряжении каждой из ладей было лишь три поля, они могли сделать только по нечетному числу ходов. Итак, ладья b1 нечет, ладья h2 тоже нечет. Слоны и ферзь не двигались с места (ферзь был взят черным конем) — чет. Король е1 чет (0, 2, 4 и т. д.). Крайние пешки продвинулись на одно поле вперед, каждая из них нечет.

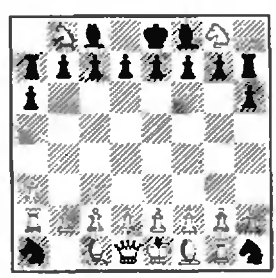
Осталось разобраться с белыми конями. В начале игры они стоят на полях одного цвета, причем каждым ходом конь меняет цвет «стоянки». Значит, при расположении коней на полях разного цвета (как в исходном положении) в общей сложности ими сделано четное число ходов, а на полях одинакового цвета — нечетное. В данном случае оба коня занимают белые поля, и мы имеем нечет. В сумме для белых получаем нечет.

Проделав аналогичный расчет для черных фигур, также получаем нечет. Поскольку белые взялись за коня d4, то они должны сделать ход **Kb5:d4**.

Конкурсные задания



21. Мат в 1 ход.



22. Играющий держится за белую фигуру. Какой ход делается?

Срок отправки решений — 25 января 1983 года (с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 21, 22»).

Цена 40 коп.
Индекс 70465

На этом рисунке наш художник сумел вывернуть шахматную доску наизнанку. Для этого он воспользовался преобразованием инверсии относительно красной окружности. (*Инверсия* относительно окружности $(O; R)$ — это преобразование плоскости, переводящее точку $M \neq O$ в точку M' на луче OM, удовлетворяющую соотношению $|OM| \cdot |OM'| = R^2$. Подробнее об этом замечательном преобразовании можно прочитать в «Кванте», 1977, № 6, с. 38.)

Внимательный читатель заметит, что изображенная здесь шахматная доска состоит из 49 полей (вместо 64) — при этом получается конфигурация, имеющая больше осей симметрии.